

# 等角直線與球面二距離集合的新上界

Wei-Hsuan Yu (2017) | 兩頁中文導讀 | 問題與成果

## 問題背景：角度與距離如何限制數量？

等角直線問題問：在  $n$  維實向量空間中，若每兩條無向直線的銳角相同，最多可以有多少條？每條線選一個單位代表向量後，條件成為不同向量內積的絕對值皆為  $\alpha$ 。記  $M_\alpha(n)$  為固定  $\alpha$  的最大條數， $M(n)$  則允許選擇角度。球面二距離問題記為  $g(n)$ ：單位球面上的點，彼此只出現兩種距離，最多有多少個？因為  $\|x-y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle$ ，這也等價於只有兩種不同內積。

## 從計算表看見可證明的規律

既有半正定規劃 (SDP) 計算中，276、1128、3160、7140 等上界反覆出現在不同維度。它們恰好是  $d(d+1)/2$ ，其中  $d=23、47、79、119$ ，又可寫成  $a^2-2$ ，對應  $a=5、7、9、11$ 。作者的問題是：這些重複數字能否由一個解析公式統一解釋，並延伸到任意大的參數？本文的貢獻是選擇少量 SDP 限制，將最佳化問題化成可手算的不等式證明。

## 主定理：固定角度上界跨越整段維度

對  $a \geq 3$ ，若整數維度滿足  $a^2-2 \leq n \leq 3a^2-16$ ，則  $M_{1/a}(n) \leq (a^2-2)(a^2-1)/2$ 。 $a$  是共同內積絕對值的倒數。例子包括： $a=3$  時，7 至 11 維的上界皆為 28； $a=5$  時，23 至 59 維的上界皆為 276； $a=7$  時，47 至 131 維的上界皆為 1128。這些是固定角度的上界，不可直接把  $M_{1/a}(n)$  換成  $M(n)$ ，也不可由上界逕自推論達界構造存在。

## 與經典上界的關係

Gerzon 界給  $M(n) \leq n(n+1)/2$ ，可由對稱矩陣  $x_i x_i^T$  的線性獨立性證明。相對界則在  $n\alpha^2 < 1$  時給  $M_\alpha(n) \leq n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ 。代入  $\alpha=1/a$ 、 $n=a^2-2$ ，恰得到主定理的常數。本文把這個數值延伸到更高維，甚至跨過相對界分母的零點。這正是新結論的特色：在一段維度區間內，即使環境空間增大，上界也不需要增大。

## 證明設定：把六個變數合成三個

SDP 利用三個向量間的內積關係，建立非負計數變數與半正定核矩陣。令  $A=(x_1+x_2)/3$ 、 $B=x_3+x_5$ 、 $C=x_4+x_6$ ，目標為最大化  $1+A$ 。二乘二矩陣  $W$  的兩列是  $(1,A)$  與  $(A,A+B+C)$ ，因此  $\det W \geq 0$  給  $A(A-1) \leq B+C$ 。作者另保留對稱化核  $S_1$ 、 $S_3$  各一個對角元素的非負條件。刪去其他限制雖擴大可行集合，但最大化所得值仍是有效上界。

# 等角直線與球面二距離集合的新上界

Wei-Hsuan Yu (2017) | 兩頁中文導讀 | 證明與結構

## 關鍵消去：配平兩個變數的係數

先考慮奇數  $a \geq 3$ ，令  $\alpha = 1/a$ ，並在整數端點  $n_0 = 3a^2 - 16$  計算。兩個核限制化為  $A + pB + qC \geq 0$  與  $A + \alpha B / (1 + \alpha) + \alpha C / (\alpha - 1) \geq 0$ 。選適當正數  $t$ ，把第二式乘  $t$  加到第一式，使  $B$ 、 $C$  的係數同為  $c < 0$ ，得到  $(t+1)A + c(B+C) \geq 0$ 。由  $B+C \geq A(A-1)$  及  $c < 0$ ，遂有  $0 \leq (t+1)A + c(B+C) \leq (t+1)A + cA(A-1)$ 。符號方向是整個證明不能省略的重點。

## 解析化簡與一個精確分數例子

$A=0$  時結論立即成立； $A>0$  時除以  $A$ ，再代入原文的  $t$ 、 $c$  公式，得到  $A \leq (1-3\alpha^2)/(2\alpha^4)$ ，故  $1+A \leq (1-2\alpha^2)(1-\alpha^2)/(2\alpha^4)$ 。改寫  $\alpha = 1/a$  就是主定理。以  $a=5$  為例， $t=1/684$ 、 $c=-5/1368$ ，算得  $A \leq 275$ ，因此最多 276 條。低維配置可補零嵌入端點維度，故上界向下適用。若  $a$  不是奇整數，可另用 Neumann 的  $M(n) \leq 2n$ ；因  $a^4 - 15a^2 + 66 > 0$ ，也得到所需上界。

## 球面二距離集合：多加一維的代價

若兩個內積  $\beta$ 、 $\gamma$  的和非負，既有結果已給點數不超過  $n(n+1)/2$ 。若  $\beta + \gamma < 0$ ，取原空間外的單位向量  $e$ ，將  $x$  送到  $y = tx + \sqrt{1-t^2}e$ ，其中  $t^2 = 2/(2-\beta-\gamma)$ 。新向量仍是單位向量，兩個內積的和變成零，因此形成  $n+1$  維等角配置。於是  $g(n) \leq \max\{M(n+1), n(n+1)/2\}$ 。另一方面，正單純形邊中點正規化提供  $n(n+1)/2$  個點，讓合適的上界直接確定最大值。

## 本篇解決的範圍與例外

結合上述方法、既有結果與 SDP 數值估計，本篇得到：對  $7 \leq n \leq 417$ ，除了 22、46、78、118、166、222、286、358 外， $g(n) = n(n+1)/2$ 。這些排除維度具有  $(2k+1)^2 - 3$  的形式。排除不表示全部未知，例如原文已指出  $g(22) = 275$ 。數值上， $M(418) \leq 86284$  足以與  $417 \times 418/2 = 87153$  比較；但表中的  $M(419) \leq 88808$  高於  $418 \times 419/2 = 87571$ ，因此這估計不足以決定  $g(418)$ 。此處引用原文表格，未重新執行 SDP。

## 閱讀價值與來源

本文示範如何讓數值規律指引解析證明：辨認參數、選少量核限制，再用係數配平消去輔助變數。它也提醒讀者分清固定角度與全角度、上界與構造、環境維度與真實張成維度。第 4 節的延伸猜想應依原文的歷史脈絡閱讀。本文依 arXiv:1609.01036v1 (2016) 編寫，不作 2026 年最新進展的宣稱。期刊書目：W.-H. Yu, New bounds for equiangular lines and spherical two-distance sets, SIAM Journal on Discrete Mathematics 31(2) (2017), 908–917。