

重量9的互不偏秤重矩陣：構造與最優性

arXiv:2501.15444v2 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要結果

秤重矩陣 $W(n,k)$ 的元素為0、1、-1，且 $WW^T=kl$ 。兩個同階同重量矩陣不偏，是指 $W_1W_2^T/\sqrt{k}$ 仍是 $W(n,k)$ 。本文聚焦重量9，固定階數 n 求互不偏家族的最大大小 f 。作者證明13是首次出現不偏配對的階數，並確定13、15、16階的最大家族分別為3、7、15。16階新找到的15個矩陣達到既有上界，是本篇最醒目的構造與最優性成果。

不偏矩陣與球面幾何

重量9矩陣每列有9個非零元素，不同列正交；兩個不偏矩陣的列內積只能0或 ± 3 。除以3後，每個矩陣的列成為 R^n 的一組正交基底，再加入標準基底，共得到 $n(f+1)$ 個單位向量，非對角內積為0、 $\pm 1/3$ 。這是球面三距離集合，但不是不同基底間所有絕對內積皆相同的一般MUB，因為零內積也被允許。球面點數上界可轉換為矩陣家族上界。

拉丁方把小矩陣擴大

取種子 $W(n,k)$ 各欄 w_i ，令 $C_i=w_iw_i^T$ 。欄正交性給 $C_iC_j=0$ 、 $C_i^2=kC_i$ 及 $\sum C_i=kl$ 。若拉丁方邊長 $t \geq n$ ，可補零區塊到 t 個符號，再以 $C_{(L(i,j))}$ 組成 nt 階、重量 k^2 的矩陣。兩個suitable拉丁方的任意兩列恰重合一次，使跨矩陣乘積每個區塊只有 kC_a ，除以 k 即合法。 f 個suitable方因此給 f 個互不偏矩陣； $t=n$ 時還能額外加入一個。

重量9的無窮族與可重現例子

由 $W(4,3)$ 種子及質數冪 q 階拉丁方，得到 $q-1$ 個 $W(4q,9)$ ， $q \geq 4$ 。 $q=5$ 時可用 F_5 上的 $L_a(i,j)=i+aj$ ， $a=1,2,3,4$ ；不同 a 的任意兩列相等條件是一元一次方程，恰有一解。本導讀已據此構造四個20階矩陣，精確驗證各矩陣 $WW^T=9l$ 及所有跨矩陣內積。這條無窮族構造與16階15個最優家族的搜尋是不同來源。

三元碼限制候選列，仍須實數檢查

因 $WW^T=9l$ 模3為零，矩陣列生成自正交三元碼 $C_3(W)$ 。若 W_2 與 W_1 不偏， W_2 每列皆在 $C_3(W_1)$ 的對偶碼內。搜尋先取重量9碼字，把 F_3 符號2還原成整數-1，再固定第一個非零元素為1，去掉換號重複。對偶碼條件僅保證內積被3整除，還可能出現 ± 6 或 ± 9 ，所以必須另檢查與 W_1 每列的整數內積只在0、 ± 3 。

重量9的互不偏秤重矩陣：構造與最優性

arXiv:2501.15444v2 (2025) | 兩頁中文導讀

兩層clique把候選組成家族

第一層圖以合法候選列為頂點，整數內積為零時相鄰； n -clique提供 n 個正交列，得到一個不偏伙伴 W_2 。第二層圖以 W_1 的伙伴矩陣為頂點，彼此不偏時相鄰； $(f-1)$ -clique加上固定 W_1 便是 f 個家族。對13、15階，作者結合既有矩陣分類與clique計算確定最大值。完整不存在性需要涵蓋所有必要代表與候選，不能由搜尋暫時失敗直接推論。

上界如何證明16階最優

球面LP給 $f \leq (n-1)(n+4)/6$ ，且 $n < 25$ 時另有 $f \leq 9(n-1)/(25-n)$ 。代 $n=16$ 得到 $f \leq 15$ ；附錄提供15個構造，所以最大值恰15，不必枚舉全部最優家族。本導讀已擷取Tables 7–8的240列，驗算15個矩陣及全部105對跨矩陣乘積。較高階則利用三點SDP，來源以MATLAB/CVX、參數5求解，24階報告上界由107降至96；此處未另提供精確SDP對偶證書。

最優矩陣產生圖、設計與協會方案

16階15個矩陣加上標準基底，得到256點 Y ；以正交為鄰接產生強正則圖(256,120,56,56)。再加入反點得到512點 $X=Y \cup (-Y)$ ，是一個球面5-design。本導讀以整數座標驗證鄰接矩陣 $A^2=64I+56J$ ，以及二次、四次球面矩，奇數矩則由反點對稱消失。距離關係給4-class Q-polynomial協會方案，利用基底分組細分後得到5-class方案。

已確定與尚未確定的範圍

10、12、14階存在秤重矩陣但沒有不偏配對，不能說這些階完全不存在矩陣。13、15、16階最大值為3、7、15；17到24階仍只有上下界，例如17階5–18、20階4–34、23階9–99、24階6–96。這些是2025來源版本的範圍。作者另找到四個本質不同的16階15矩陣家族，其5-class協會方案互不同構；這是四個例子，不是所有最優家族的完整分類。

研究意義與可延伸方向

本篇把拉丁方構造、有限域碼、clique搜尋與球面LP/SDP串成完整方法，並展示達界構型能產生豐富代數組合結構。下一步可研究重量25的 F_5 碼搜尋、改進未定階數的上下界，或辨別最優家族的等價性；模 p 方法仍需保留整數內積篩選。來源：Makoto Araya、Masaaki Harada、Hadi Kharaghani、Sho Suda、Wei-Hsuan Yu，Unbiased weighing matrices of weight 9，arXiv:2501.15444v2 (2025)，Designs, Codes and Cryptography。