

球面兩距離 {4,2,1} 設計的分類

Author manuscript (15 pages) | 兩頁中文導讀

問題：兩種距離加上三種調和矩

令 X 是 n 維單位球面上的有限集合，不同點的內積恰有兩個值。再要求所有一次、二次與四次齊次調和多項式在 X 上的總和為零，稱為調和指標 $\{1,2,4\}$ 的設計。一次條件表示零重心；二次條件表示 $\sum uu^T = (|X|/n)I$ ，即各方向的二階能量相同。四次條件限制更細的方向分布。由於未假設三次條件，不能先把 X 視為普通球面四設計。

主定理：只剩兩種極端結構

對 $n \geq 2$ ，作者證明 X 必為 tight spherical 4-design，或 X 與 $-X$ 不相交而其聯集為 tight spherical 5-design。Tight 指點數恰等於設計的 Fisher 下界：四設計為 $n(n+3)/2$ ，五設計為 $n(n+1)$ 。因此第二類 X 本身有 $n(n+1)/2$ 點。這是結構分類，並非宣告每組形式參數都能實現。從五設計任取一半也未必零重心，必須另外檢查一次條件。

幾何如何轉成圖的特徵值

以某一種內積定義相鄰關係，兩距離二設計連到強正則圖的球面嵌入。設非平凡特徵值為 x, y ，參數為 (v, k, λ, μ) ，則 $k = \mu - xy$ 、 $\lambda = x + y + \mu$ 、 $v = (k - x)(k - y)/\mu$ 。嵌入於 y 特徵空間，維數 n 等於其重數；Gram 矩陣是 $(v/n)E_v$ ，兩內積為 y/k 與 $(-y-1)/(v-k-1)$ 。幾何資料於是由三個代數變數控制。

四次矩形成 Diophantine 方程

使用 Gegenbauer 多項式的加法公式，四次條件可寫為 $Q_4(1) + kQ_4(a) + (v-k-1)Q_4(b) = 0$ 。代入參數後分解，排除符號不可能或退化因子，留下對 μ 為三次的主要因子 $F_3(x, y, \mu) = 0$ 。還須滿足正性、整數性、非零分母，以及兩距離上界 $v \leq n(n+3)/2$ 。非 conference 分支的特徵值為整數；conference 分支經小維數檢查只留下正五邊形。

整數的離散性提供精確限制

長證明先把 y 夾在 $-(2x^3+3x^2)$ 附近的狹窄條帶，再控制 μ 與維數偏差。核心技巧是構造整數值 z ，利用帶明確餘項的估計證明 $|z|$ 小於 1，於是 z 必為零。新增等式降低代數曲面的自由度；消去變數、定位實根並使用整數性後，得到兩個參數族。小參數則在已證有界的範圍內枚舉。這是結合圖論限制的專門方法，而非任意整數方程的通用解法。

球面兩距離 {4,2,1} 設計的分類

Author manuscript (15 pages) | 兩頁中文導讀

第一族：緊四設計

令 t 為正整數，第一族有 $x=t$ 、 $y=-t^2(2t+3)$ 、 $\mu=t^3(2t+3)$ ，其維數 $n=4t^2+4t-2$ ，點數 $v=n(n+3)/2$ 。內積為 $-1/(2t)$ 與 $1/(2(t+2))$ 。代入後三次調和條件也成立，因此原有的 $\{1,2,4\}$ 補成普通四設計，點數取等號即為 tight。 $t=1$ 對應六維27點， $t=2$ 對應22維275點；正五邊形則來自另外的 conference 分支。

第二族：補成緊五設計

第二族保持 x 、 y 相同，但 $\mu=t^2(t+1)(2t+3)$ ，得到 $n=4t^2+4t-1$ 、 $v=n(n+1)/2$ ，兩內積為 $\pm 1/(2t+1)$ 。不存在內積 -1 ，所以 X 與 $-X$ 不相交。聯集保留二、四次條件，而對蹠性使一、三、五次自動相消，故為點數 $n(n+1)$ 的 tight 五設計。 $t=1$ 給七維28點補成56點； $t=2$ 給23維276點補成552點。任意 t 的存在性仍須另外證明。

Nozaki 的短證明揭露上下界的剛性

作者在手稿末尾致謝 Nozaki 並介紹短證明。若 X 也滿足三次條件，則它是四設計，而 Fisher 下界與兩距離上界相同，直接得到 tight。若不滿足三次條件，既有改良少距離界給 $|X| \leq n(n+1)/2$ 。對蹠多重集合 $X \cup -X$ 是五設計，Fisher 下界給反向不等式，迫使取等號；等號的秩條件排除重複點，得到第二種結構。此證明依賴已知的改良少距離界。

電腦輔助與結論範圍

原文用符號計算驗證多項式恆等式、區域不等式與有限枚舉；大參數由分析估計和整數性涵蓋。此導讀解釋證明並展示參數代入，未重新執行全部補充程式。不能刪去點數上界後仍引用原定理；較強的無限制整數方程分類，以及三距離五設計的延伸，在所讀手稿中另列為猜想。這些標示只反映來源版本，不表示目前研究狀態。

意義與來源

本篇把少距離幾何、強正則圖譜與整數方程連在一起：平均性造成代數條件，離散性使近似界成為精確分類。來源為 Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Ziqing Xiang、Wei-Hsuan Yu、Yan Zhu，Classification of spherical 2-distance $\{4,2,1\}$ -designs by solving Diophantine equations，Taiwanese Journal of Mathematics 25(1) (2021)，1–22，DOI:10.11650/tjm/200601。本文依 ziqing.org 提供的十五頁作者手稿，手稿標題為 Classification of feasible parameters by solving Diophantine equations。