

三角格點上的少距離集合：從最大團到六角形

arXiv:2509.00880v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：只用少數距離，能放多少點？

平面上的有限點集，若不同點之間出現的距離種類不超過 m ，就是本文搜尋的對象。作者把問題限制在三角格點，結合最大團演算法與六角形構造，提出 $m=7$ 至 34 的一系列大型例子。這些結果提供平面問題的下界；在限制搜尋中找到最優解，不等於證明所有平面構型的最大點數。

格點座標讓距離可以精確檢查

用基底 $(1,0)$ 與 $(1/2, \sqrt{3}/2)$ 表示格點，整數座標差 (a,b) 的距離平方就是 a^2+ab+b^2 。前幾種非零值是1、3、4、7、9、12、13。這讓距離比較化為整數運算，避開浮點平方根誤差。三角格點的高度對稱也讓旋轉、反射及平移等價的候選容易辨認。

第一條路：把幾何問題轉成最大團

固定允許距離集合 S 及一對單位距離基準點，先列出到兩基準點的距離都屬於 S 的候選格點。候選點彼此距離在 S 內才連邊。任一團加上兩基準點，都是合法少距離集合；最大團給這個固定 S 及基準對之下的最佳點數。它不能排除使用不同距離集合或不包含此基準距離的更好構造。

前 m 個最短距離是起點，卻未必最好

作者先採用格點中最短的 m 種距離。所得例子包含 $m=7$ 的16點、 $m=8$ 的19點、 $m=10$ 的24點，以及 $m=15$ 的37點。部分相鄰 m 給相同點數，例如11與12均為27，15與16均為37。因此總表採「至多 m 種距離」的意義；不可把每個表格項都稱為恰好 m 距離的構型。

第二條路：從六角形保留更多點

取正六角形內及邊界的全部三角格點，或取邊長交替為 k 、 $k+1$ 的等角六角形，再視需要刪去角落或直徑端點，降低距離種類。正六角形邊長2、3、4、5分別給19、37、61、91點，距離種類為8、15、23、34。交替邊長 $1/2$ 、 $2/3$ 、 $3/4$ 、 $4/5$ 則給12、27、48、75點，距離種類為5、11、19、28。

三角格點上的少距離集合：從最大團到六角形

arXiv:2509.00880v1 (2025) | 兩頁中文導讀

關鍵例子：19種距離放進48點

在固定最短19種距離的搜尋中，來源得到45點；邊長交替3、4的六角形則有48點。它捨棄距離 $\sqrt{48}$ ，改用稍長的7，總距離種類仍是19。這說明「距離都挑最短」會漏掉好構造。導讀重新列出48個整數座標，逐一計算1128個無序點對，確認點數、距離種類與原文重數陣列一致。

距離重數解釋為何交換有效

某種距離的重數，是實現該距離的無序點對數。最短19距離的45點例子中，最長距離 $\sqrt{48}$ 只出現一次；48點六角形最長距離7出現三次。低重數距離可能消耗一個距離名額卻貢獻很少，改換距離集合便可能容納更多點。這是引導搜尋的觀察，不是任意換掉低重數距離都能增點的定理。

表格結果與來源中的數字校正

兩條路互補：六角形在 $m=19、23、28、29、34$ 得到48、61、75、75、91點。原文Property 4.1.2有一處把邊長4正六角形寫成63點，但總表為61；按整數座標直接重算亦為61，因此本導讀採61。這裡的提升是對文中另一搜尋方案的比較，不表示已逐一核對所有後續文獻的世界紀錄。

未解問題：下界距離全域最優還多遠？

Erdős–Fishburn的相關猜想預期，對足夠大的 m ，平面最大 m 距離構型與三角格點密切相關；本文並未證明猜想，也未證明 $m=7$ 的16點或 $m=8$ 的19點就是全域最佳。原文另猜測大型最優構造不會有重數至多2的距離。它可作為搜尋啟發，但不能用來刪除候選後宣稱搜尋已完備。

研究價值：計算找規律，幾何突破限制

最大團提供可執行的離散模型，對稱六角形提供超出最初距離選擇的構造，兩者的比較揭示距離重數的重要性。後續可保存完整座標證書、擴大距離候選、分析群作用以加速搜尋，並尋找配套上界。來源：Li-Ren Bao、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2509.00880v1（2025年），19頁；程式連結見論文。