

分割 Terwilliger 代數的二元碼上界

arXiv:2203.06568v4 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要成果

$A(n,d)$ 表示長度 n 、任意兩個不同碼字Hamming距離至少 d 的二元碼最大大小；碼不必線性。本文將座標分區，保留更細的三點距離資訊，再利用split Terwilliger algebra導出半正定限制。作者以此把 $A(18,4)$ 的已知上界由6552改善為6551，並估計對偶誤差以支持整數上界。這不是6551碼字的建構，也不是證明 $A(18,4)=6551$ 。ISIT2022的相關會議版本與此文可共用這組導讀資源。

從距離分布到三點限制

距離分布 A_j 是距離 j 的有序碼字對數除以 $|C|$ ，因此 $A_0=1$ 、 $\sum A_j=|C|$ ， $1 \leq j < d$ 時 $A_j=0$ 。Delsarte LP另要求Krawtchouk轉換非負。Schrijver SDP則看三元組 (X,Y,Z) ：把 X 以XOR平移至零，記兩個相對支持集大小 i 、 j 及交集 t ，第三邊距離便為 $i+j-2t$ 。三點資訊比兩點分布更細，可排除某些雖滿足距離平均、卻不符合局部幾何的候選解。

半正定性與對稱化

碼的指示向量 χ 給出外積 $\chi\chi^T$ ，因 $v^T\chi\chi^Tv=(v^T\chi)^2 \geq 0$ 而半正定。對等距變換取平均，並依零字是否在變換後的碼中分成 R 與 R' ，仍保留半正定性。固定零字後的座標置換軌道由 (i,j,t) 描述，形成Terwilliger代數；其維度為 $\text{binom}(n+3,3)$ ，可分成大小 $n-2k+1$ 的區塊。這裡須區分包含平移的全等距群與固定零字的穩定子，否則個別重量 i 、 j 並不被保留。

分割如何保留更多資訊

把座標分為 T_1 、 T_2 ，大小 $|n_1|+|n_2|=n$ 。同一總距離4可分為 $(0,4)$ 、 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ ，一般距離分布會把這些不同情況合併。分割三元組使用六個索引 $(i,j,t;i',j',t')$ ，並對兩區分別計算支持大小與交疊。最小距離限制必須用總三邊距離，不能要求每一區都至少 d 。三條邊的分區向量也必須同步置換，不能在兩區各自隨意交換。

張量積讓新限制可計算

分割軌道矩陣等於兩個局部矩陣的Kronecker乘積，因此 $A_{(n_1,n_2)} \cong A_{(n_1)} \otimes A_{(n_2)}$ 。區塊 (k,k') 大小為 $(n_1-2k+1)(n_2-2k'+1)$ 。在 $18=2+16$ 時，每個PSD家族有18個區塊，最大51階，相較原矩陣262144階小得多。這是代數同構下去除重複表示，不是任意裁切。 R_s 與 R'_s 兩種條件平均各提供一組新限制，不能只保留其中一種便宣稱得到相同結果。

分割 Terwilliger 代數的二元碼上界

arXiv:2203.06568v4 (2023) | 兩頁中文導讀

變數、目標與線性一致性

三元組計數 λ 以 $|C|$ 及軌道大小正規化成 x ；軌道大小須包括「只在第一支持、只在第二支持、兩者都有、兩者都無」四類座標的階乘，分割時取兩區乘積。目標 $\sum \text{binom}(n_1, i) \text{binom}(n_2, i') x_{\text{pair}}$ 仍是碼大小。變數滿足 $0 \leq x_{\text{triplet}} \leq x_{\text{pair}} \leq 1$ 、正規化、邊置換與禁距離條件。原始 λ 可由分割 λ 相加，正規化 x 卻必須帶軌道比例聚合，不能直接求和。原文多項係數的剩餘階乘漏項，導讀依正確軌道計數解釋。

為何還要加入已知限制

R_s 與 R'_s 的非負線性組合落在分割Bose–Mesner代數，同時對角化可推出 $\sum A_{(i,j)} K_p^{(n_1)}(i) K_q^{(n_2)}(j) \geq 0$ ，所以split SDP包含split Delsarte頻譜限制。實際模型還整合原始Schrijver PSD、Best與Mounits–Etzion–Litsyn不等式，以及常重量、雙常重量碼上界。例如 $A_i \leq A(n, d, i)$ ，因固定碼字平移後，其距離 i 鄰居形成常重量碼。加強LP有額外組合限制，故不能只以「SDP」名稱判定任何設定都優於它。

對偶誤差如何變成可靠上界

設原始SDP為 $\max c \cdot x$ ， $F_0 + \sum x_i F_i \geq 0$ 。若對偶 $Y \geq 0$ 且 $\text{tr}(F_i Y) + c_i = 0$ ，弱對偶性給 $c \cdot x \leq \text{tr}(F_0 Y)$ 。浮點殘差 $\epsilon_i = \text{tr}(F_i Y) + c_i$ 可用 $0 \leq x_i \leq 1$ 補償，得到上界 $\text{tr}(F_0 Y) + \sum \max(0, \epsilon_i)$ 。此式仍要求 Y 半正定，不能只修正等式殘差而忽略負特徵值。原文稱變數negative是筆誤，應為nonnegative。本導讀轉述作者的驗證，沒有重新執行求解器或獨立審核完整數值證書。

6551已驗證，13087尚未驗證

Theorem 19使用 $2+16$ 分割，報告 $A(18, 4) \leq 6551.93$ 且誤差項小於 10^{-16} ，利用碼大小整數便得 ≤ 6551 。另一組較少限制給6551.98，也跨過相同整數門檻。對 $A(19, 4)$ ， $9+10$ 分割的求解值約13087.5，但保守誤差估計高達215.7376，相加13303.2376，無法改善原文比較上界13104。因此不能把13087寫成本文已證定理；軟體正常結束或作者相信數值正確，都不能取代所需認證。

方法關係、延伸與來源

作者證明四點SDP可推出 R_s 的PSD限制，但是否也包含 R'_s 限制在原文未解決；不能由單一參數的改善推論普遍支配。 m 分區可用各局部代數張量積推廣，但平衡分區變數數量約 $O((n/m)^{(3m)})$ ，成本迅速增加。常重量、非二元碼與其他association schemes是後續方向。來源：Pin-Chieh Tseng、Ching-Yi Lai、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds for binary codes from a split Terwilliger algebra，arXiv:2203.06568v4 (2023)；相關ISIT2022會議版本。