

球面三距離集合的半正定規劃上界

arXiv:2005.01324v1 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與23維的答案

球面三距離集合是 R^n 中的有限單位向量集，不同點的內積恰有三種值 $d_1 < d_2 < d_3$ ；因 $\|x-y\|^2 = 2-2\langle x,y \rangle$ ，也等價於三種歐氏距離。本文結合調和維度界、Nozaki整數性、半正定規劃與平方和，證明23維最大大小為2300。已知4600點的反tight 7-design每對取一點可得2300點三距離集合，內積為 $-1/3$ 、 0 、 $1/3$ ，提供下界；全域上界則必須涵蓋所有可能的三內積，不能只檢查這個特殊構造。

調和界與特殊內積算例

一般Delsarte–Goethals–Seidel上界為 $n(n+1)(n+5)/6$ ，在23維是2576。若固定三個內積，取 $f(x) = \prod (x-d_i)$ ，使 $f(1) > 0$ ，展開成正規化Gegenbauer基底；正係數所對應的調和空間維度之和給上界。對 $-1/3$ 、 0 、 $1/3$ ， $f = x^3 - x/9 = (2/225)G_1 + (22/25)G_3$ ，故 $|X| \leq h_1 + h_3 = 23 + 2277 = 2300$ 。原文乘積符號與例子係數不一致，導讀採上述一致規約。此算例只是固定內積的上界，尚未處理其他候選。

從兩點LP到三點SDP

球面調和加法公式給 $\sum_k (x,y) G_k(\langle x,y \rangle) \geq 0$ ，導出平均鄰居數的LP限制。SDP再看三點內積 (u,v,t) ，將兩向量投影到第一向量的正交補空間，得到 $(t-uv)/\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}$ 的投影內積，再構成Bachoc–Vallentin矩陣核並對六種置換對稱化。本文使用13個三元組計數變數：3種重複點型態與10種不同點型態；搭配非負計數、 2×2 矩條件、LP次數18及SDP核次數6。其目標為 $1+(x_1+x_2+x_3)/3$ ，變數正規化與LP不同。

整數條件把搜尋降為一維

Nozaki定理指出， $N = h_0 + h_1 + h_2 = n(n+3)/2$ 且 $|X| \geq 2N$ 時， $K_i = \prod_{j \neq i} (d_j - 1)/(d_j - d_i)$ 為有界整數；較小集合直接由 $2N-1$ 控制。Lagrange插值給 $\sum K_i = \sum d_i K_i = \sum d_i^2 K_i = 1$ 。固定有限種整數三元組，令 $a = d_3$ ，便能將 d_1 、 d_2 寫成 a 的仿射函數，再保留合法順序的區間。23維 $N = 299$ ，小集合上界597，原文列66種整數三元組；特殊構造對應 $(3, -8, 6)$ 。整數參數可行不代表實際點集必然存在。

兩種上界互補

對每個候選參數，取harmonic bound與SDP bound的較小者，再對所有候選取最大，並納入小集合門檻。靠近某些端點時LP／SDP可能變大，但harmonic bound仍能控制；另一部分區域則靠SDP改善。23維中 $(1, -3, 3)$ 與 $(2, -6, 5)$ 分支的取樣LP最大值約2385.60、2319.82，而SDP約1072.29、1693.01。這些最大值未必發生在相同參數，更不能把有限取樣結果直接當成整段區間的嚴格上界。

球面三距離集合的半正定規劃上界

arXiv:2005.01324v1 (2020) | 兩頁中文導讀

為何取樣圖還不是證明

即使網格很密、圖形看起來平滑，兩個取樣點之間仍可能出現更大的值。本文因此把對偶限制改寫成單變數 a 的多項式非負條件，尋找在整個 $[L,U]$ 上可行的同一組對偶變數，使對偶目標成為統一上界。這同時涉及連續參數覆蓋與數值可行性；只檢查求解器沒有警告，或只保存幾個網格點的答案，都不能取代所需的區間證書。

平方和如何變成半正定規劃

令 $a=(L+Uz^2)/(1+z^2)$ ，對 m 次多項式 f 乘上 $(1+z^2)^m$ ，得到 $F(z)$ 。有限 z 涵蓋 $[L,U]$ ，端點 U 以極限與連續性補入，因此區間非負性可轉為整條實線上的二元多項式非負性。一元非負多項式可寫成平方和，亦即 $F=v^T Q v$ 、 $Q \geq 0$ ， $v=(1,z,\dots,z^m)$ 。係數比對是線性條件，故可用SDP尋找 Q 。這個等價是單變數的重要特性，不能擴張成所有多變數非負多項式都必為平方和。

整數門檻的重要細節

Table5在23維、 $K=(3,-8,6)$ 、 $a \in [0.332, 0.335]$ 報告SOS上界2300.85。它其實大於2300，與原文「所有SOS值都小於harmonic bound」的文字不完全一致；但 $2300.85 < 2301$ ，加上 $|X|$ 是整數，仍可推出 ≤ 2300 。導讀採這個正確解釋。其他關鍵分支有1234.62與1703.71等值。表格只列關鍵區間，完整論證仍需所有分支與區間覆蓋，以及矩陣與係數的可驗證性；本導讀未獨立重跑完整證書。

六個維度的成果與未解問題

相對原文引用的舊上界， $n=7$ 由91降84， $n=20$ 由1541降1540， $n=21$ 由1772降1771， $n=23$ 由2301降2300， $n=24$ 由2601降2600， $n=25$ 由2926降2925。23維因已知構造而得到精確答案；其他改善不能都寫成等號。7維原文已知下界64，半個 E_7 只有63點。PSL(2,7)群軌道與能量最小化搜尋未找到84點，並不證明84點不存在，也不能把作者的期待寫成已完成構造。

方法意義與來源

本文的價值在於把有限整數分類、局部凸最佳化與連續區間的平方和控制接起來，展示由計算探索走向全域上界的路徑。它沒有給所有維度的閉式最大值，也沒有證明每個tight7-design的半集必定全域最大。來源：Feng-Yuan Liu、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds for spherical three-distance sets，arXiv:2005.01324v1 (2020)。導讀中的數值比較是此版本報告的歷史成果，不宣稱是2026年的最新紀錄。