

在圖上分享茶：距離界與最優策略

arXiv:2405.15353v2 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：平均竟然也有策略

在圖 G 上，每個頂點放有非負茶量 $w(x)$ 。一次分享選一個有限連通頂點集合 T ，把其中的總茶量平均分給 T ，其餘位置不動。給定起始分布與目標頂點 v ，能把多少茶集中到 v ？平均會減少差異，但操作次序仍可影響目標濃度。本文證明單一來源的精確距離界，並研究多來源上界、有限圖的最佳策略存在性與來源—目標對偶。

主定理與一個必要區分

若一開始只有 r 放有1單位茶，則任何可達狀態都滿足 $w(v) \leq 1/(d(r,v)+1)$ 。一般分享只需選一條 r 到 v 的最短路徑一次平均，即可達界。邊操作只准相鄰兩點平均，雖也受同一上界限制，卻不一定有限次達到。例如三點路徑末端的最佳上確界是 $1/3$ ；從整數初態做有限次兩點平均只會產生分母為2冪的數，因此只能逼近 $1/3$ 。

證明亮點：控制所有集合的茶量

令 $p_r(S) = \prod_{x \in S} d(r,x)/(d(r,x)+1)$ ，作者以 $w(S) \leq 1 - p_r(S)$ 作歸納不變量。初態 δ_r 立刻符合。若平均邊 xy 跨越 S 邊界，平均後 $w(S)$ 恰為舊 $w(S-x)$ 與 $w(S+y)$ 的平均。相鄰距離 a, b 滿足 $a \leq b+1$ ，而 $1+ab/((a+1)(b+1)) - 2a/(a+1) = (b+1-a)/((a+1)(b+1)) \geq 0$ ，剛好使集合上界被保留。取 $S=\{v\}$ 即得主定理。

一般分享與多個目標

一般連通集合平均可用邊平均逼近，因而保留相同上界；附錄A另給直接的加權乘積證明，利用連通集合上的距離標記形成整數區間。集合不變量也控制多目標總量：若兩個目標距離 r 分別為1、2，總茶量不超過 $1 - (1/2)(2/3) = 2/3$ 。不過單點可以最短路徑達界，不代表所有多目標集合的上界都可達。

任意起始分布的距離potential

對目標 v 及來源 x ，定義 $h_x(a) = a + (w(x) - a)/(d(x,v)+1)$ 。選出初始 $w(x) > w(v)$ 的來源，按茶量遞增依序組合 h_x ，從 $w(v)$ 開始，得到任何可達目標茶量的上界。兩個來源的交換差值是 $(w(y) - w(x))/((d_x+1)(d_y+1))$ ，所以由淡到濃最有利。這是一般圖的分析potential，不應直接宣稱每個映射組合都能用實際分享達成。

在圖上分享茶：距離界與最優策略

arXiv:2405.15353v2 (2025) | 兩頁中文導讀

星狀圖展示排序與達界

星狀圖各來源都是目標中心的鄰居，且未使用的葉子保持原值，因此由淡到濃逐片平均確實能達到potential。中心0、葉子1、2、4時，依序得到 $1/2$ 、 $5/4$ 、 $21/8$ ，比全圖一次平均的 $7/4$ 大；反序則只得 $3/2$ 。本文也指出無限星狀圖可能沒有有限最佳策略：中心0、葉子 i 茶量 2^{-i} ，用前 k 片由小到大平均得到 $(1-4^{-k})/3$ ，逼近但不達 $1/3$ ；此公式是導讀補算。

有限圖的可達集是緊緻的

對有限圖，一般分享的可達集 $R(w)$ 不僅有界，也封閉，故任何連續目標函數都能取得最大值。核心是把平均寫成對稱正交投影 A_T ；平方範數下降量等於集合內偏離均值的平方和。無限操作鏈的極限，在反覆操作集合的連通分量內成為均勻分布，可由有限前綴再平均各分量實現。要處理不在同一操作鏈的任意收斂序列，作者另以可達偏序、距離函數與Zorn引理證閉性。

存在性不等於快速求出策略

緊緻性保證最佳值能由有限次一般操作取得，但沒有直接給出通用的短策略或有效率演算法。可達集也不一定凸：兩點圖從 $(1,0)$ 出發，只能到原態或 $(1/2,1/2)$ 。文中樹圖反例顯示，不能一概禁止早期平均集合包含於較晚集合；某些最佳策略必須有這種包含。這些現象提醒我們：局部平均的可達幾何比單純守恆或凸組合直覺更細緻。

對偶性把多來源換成多目標

每個平均矩陣對稱，所以 $\langle c, A_{T_k} \cdots A_{T_1} w \rangle = \langle w, A_{T_1} \cdots A_{T_k} c \rangle$ 。對所有序列取上確界，就得到交換初始分布 w 與目標權重 c 的對偶。從 X 每點放1單位、最大化 v ，等同從 v 放1單位、最大化 X 總茶量。操作次序反轉不是逆操作，因為平均通常不可逆。若准許邊上的部分平均，線性目標上確界不變，因其乘積可展開成普通邊操作序列的凸組合；可達集本身仍可能不同。

國際合作與研究延伸

本文連結圖距離、組合不變量、投影動力學與最優化；後續可探討短最優策略、特殊圖類及多目標達界條件。九位作者為J. Pascal Gollin、Kevin Hendrey、Hao Huang、Tony Huynh、Bojan Mohar、Sang-il Oum、Ningyuan Yang、Wei-Hsuan Yu、Xuding Zhu。致謝提及2024中研院Pacific Rim Graph Theory Group Workshop。導讀依Sharing tea on a graph，arXiv:2405.15353v2（2025年9月），不把來源版本的研究問題當成已核實的最新狀態。