

核心問題：飽和不等於最大

本篇研究實等角直線配置的兩個問題：既有配置能否再加一條線，以及如何從高維配置中找出大型低維子集。若 X 在自己的張成空間內，不能再加入一條與所有舊線具有相同角度的直線，便稱 X 飽和。這只是固定配置的延伸性質，不代表它在所有配置中線數最多。本篇同時證明 18 維中的某個 54 線配置飽和，又找到另一個 56 線配置，清楚展示兩種概念的差別。

把連續幾何化成有限符號枚舉

以單位向量代表直線，兩兩內積為 $\pm\alpha$ ，實際夾角是 $\arccos\alpha$ 。從 X 選 r 個線性獨立向量組成基底矩陣 B ，令 $H=B^TB$ 。任何候選 v 都需滿足 $B^Tv=\alpha s$ ，其中 s 是 r 維正負一符號向量。因此 $v=\alpha BH^{-1}s$ ，且其單位長條件是 $\alpha^2 s^T H^{-1} s=1$ 。 s 與 $-s$ 表示同一直線，固定第一個符號為正後，只剩 2^{r-1} 種模式。這裡的基底是線性代數基底。

相容圖與飽和證書

把所有通過單位長條件的候選當作圖頂點，當兩候選的內積絕對值為 α 時連邊。clique 代表可同時加入基底的直線集合，故包含該基底的配置有 $r+\omega(G)$ 條線。若這個值恰等於 $|X|$ ，就證明 X 飽和。反過來，若最大 clique 更大，卻不一定能保留 X 的所有原向量，因此不能立刻說 X 可延伸；仍要檢查對既有 clique 的共同鄰居。

14 維的完整計算例子

Tremain 的設計構造給 14 維中的 28 條等角直線， $\alpha=1/5$ 。作者選取偶數編號的 14 個向量為基底，從 $2^{13}=8192$ 個模式中找到 378 個單位候選，再以 Sage 算得相容圖最大 clique 為 14。於是 $14+14=28$ ，得到飽和證書。這把原本可能考慮的 2^{27} 種符號組合大幅縮減。數字來自原文的計算結果；本導讀沒有宣稱重跑該大型枚舉。

Witt 設計與六種飽和配置

Theorem 1 證明指定的 28 線／14 維、40 線／16 維、48 線／17 維、54 線／18 維、72 線／19 維與 90 線／20 維配置飽和。後兩者由 24 點、759 個八元區塊的 Witt 設計建構；其標準記法為 $S(5,8,24)$ 。90 線例子選 20 個基底後只有 70 個單位候選，恰好全是剩餘舊線，因此沒有任何新方向可加。再加正交條件可選出 72 線／19 維子配置。

等角直線的飽和配置與大型新構造

arXiv:1801.04502v2 (2018) | 兩頁中文導讀

第二種方法：切出低秩子配置

從大型等角配置 X 中選 r 個線性獨立向量 T ，收集 $X \cap \text{span } T$ 的所有向量。它們自動繼承原本角度，並因包含 r 個獨立向量而恰好具有秩 r 。也可以直接在 Gram 矩陣中選 r 個獨立列，收集落在其列空間中的所有列，再取對應主子矩陣。反覆隨機選擇 T 是找大型例子的實驗方法；找到一個可驗證例子就足以給存在性下界，但不提供最大值證明。

固定 $\alpha=1/7$ 的四個新構造

作者以已知的 344 線／43 維配置為母體，它可由 $\text{SRG}(344,168,92,72)$ 得到。數千次試驗後，在 42 維找到 248 線；類似方法在 41、40、39 維分別找到 200、168、152 線。這些成果針對固定角度 $\alpha=1/7$ ，不能說成不限制角度時的最大線數。例如原文本來就列出 $\alpha=1/5$ 的 276 線配置可置於 23–41 維空間。

上界還留下多少空間

若 $r\alpha^2 < 1$ ，相對界為 $|X| \leq r(1-\alpha^2)/(1-r\alpha^2)$ 。它由 Gram 矩陣的跡與平方跡不等式推出；分母為正是必要前提。 $\alpha=1/7$ 時化成 $48r/(49-r)$ ，因此 42、41、40、39 維的整數上界依序為 288、246、213、187。與新構造相比，原文的下上界區間是 $[248,288]$ 、 $[200,246]$ 、 $[168,213]$ 、 $[152,187]$ ，仍有距離，並未求得精確最大值。

18 維的 56 線與計算瓶頸

由 72 線／19 維配置反覆選 18 個獨立向量，作者找到兩種 56 線配置，以額外法向量 u_1 、 u_2 描述其子空間，並確認兩者飽和。這把當時 $N(18)$ 的已知構造下界從 54 提高到 56。另一方面，42 維的飽和檢查需枚舉 2^{41} ，約 2.2 兆種模式，作者未完成計算。因此 248 線／42 維在本篇是新構造，不能加上已證明飽和的標籤。

貢獻、限制與原文來源

本篇展示精確線性代數、相容圖與隨機低秩搜尋如何配合：前者驗證固定配置不能延伸，後者產生更大的例子。作者據此提出若干維度最大值猜想，但飽和證據尚不足以排除所有其他配置。所有歷史紀錄與猜想狀態均依原文版本敘述。來源：Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，Saturated configuration and new large construction of equiangular lines，arXiv:1801.04502v2 (2018)；Linear Algebra and its Applications 588 (2020)，272–281。