

遞迴多項式的封閉公式與應用

Ars Combinatoria 142 (2019), pp. 175–195 | 兩頁中文導讀

以一個家族統整多種遞迴

本篇研究二變數多項式 $M_0=a$ 、 $M_1=bx+cy+d$ ，以及 $M_n=xM_{n-1}+yM_{n-2}$ ($n \geq 2$)，其中 a 、 b 、 c 、 d 是實常數。固定 $y=1$ 或 $x=1$ 並調整初值，可得到不同 Fibonacci 型家族。作者提供有限和與 Binet 封閉公式，再應用於數值序列的長期行為、組合恆等式，以及微分與卷積的關聯。

有限和公式的精簡寫法

令 $U_0=0$ 、 $U_1=1$ ，且 U 遵循相同遞迴。則 $n \geq 1$ 時， $M_n=M_1U_n+ayU_{n-1}$ ，而 $U_n=\sum_j \text{binom}(n-1-j,j)x^{n-1-2j}y^j$ ，求和範圍為 $0 \leq j \leq \text{floor}((n-1)/2)$ 。這是原文有限和的等價整理： j 表示二步塊數，另外有 $n-1-2j$ 個一步塊，排列二步位置得到二項係數。Pascal 恆等式也直接驗證遞迴。

Binet 公式與退化情況

特徵方程為 $r^2-xr-y=0$ 。兩根不同時， $M_n=Ar_+^n+Br_-^n$ ，其中 $A=(M_1-ar_-)/(r_+-r_-)$ 、 $B=(ar_+-M_1)/(r_+-r_-)$ 。重根必須滿足判別式 $x^2+4y=0$ ，故軌跡是 $y=-x^2/4$ ；掃描版該處的正負號以此條件校正。若 $r=x/2 \neq 0$ ，解為 $[a+n(M_1/r-a)]r^n$ ；若 $x=y=0$ ，直接由遞迴知 $n \geq 2$ 的項全為零。

穩定三角形與初值的角色

參數區域 $|y| < 1$ 、 $|x| < 1-y$ 是頂點 $(0,1)$ 、 $(-2,-1)$ 、 $(2,-1)$ 所圍三角形的嚴格內部，兩根都在單位圓內，因此所有初值都趨零。外部存在不穩定根，卻不能據此說每組初值皆發散：例如 $x=3/2$ 、 $y=1$ ，根為 2 、 $-1/2$ ；取 $M_0=1$ 、 $M_1=-1/2$ ，增長項消失，留下 $M_n=(-1/2)^n$ 。教材保留這個必要限定。

三條邊與三個頂點

右邊 $x=1-y$ 的根是 1 、 $-y$ ，序列趨常數；左邊 $x=y-1$ 的根是 -1 、 y ，通常漸近交替。底邊 $y=-1$ 、 $|x| < 2$ 的根為 $e \pm i\theta$ ， $x=2\cos\theta$ ，因此有界； $\theta/(2\pi)$ 為有理數時具有週期。頂點 $(0,1)$ 交替初始兩值； $(\pm 2,-1)$ 是重根 ± 1 ，除非初值消去 n 因子，否則會出現線性振幅增長。

遞迴多項式的封閉公式與應用

Ars Combinatoria 142 (2019), pp. 175–195 | 兩頁中文導讀

由參數代入得到字串恆等式

取 $a=1$ 、 $b=c=0$ 、 $d=w$ 、 $x=1$ 、 $y=w^2-w$ ，則 $M_n=w^n$ 。把這組參數代入有限和，可得 $w^n=\sum_k[\text{binom}(n-k,k)+(w-1)\text{binom}(n-k-1,k)]w^k(w-1)^k$ 。當 w 是正整數，右側也可以解釋為 w 個字母組成的長度 n 字串之分類計數；越界二項係數取零。

分類為何既不重複也不遺漏

令 $\phi_k(s)$ 為字串前 $n-k$ 格的非零字母數。 A_k 要求 $\phi_k=k$ ； B_k 要求 $\phi_{k+1}=k$ 且第 $n-k$ 格非零。兩類大小正是恆等式的兩項。 $\delta_k=\phi_k-k$ 每步下降一或二，從非負走到非正：遇到零是 A 類，從一跳到負一是 B 類。單調性使交會唯一，所以所有字串恰好計一次。例如 $n=w=3$ ，四個非空類大小為 1、2、12、12，合計 27。

用生成函數看卷積與微分

離散卷積定義為 $(f^*g)_n=\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$ 。令 $B_0=B_1=1$ 、 $B_n=B_{n-1}+yB_{n-2}$ ，其生成函數為 $1/D$ ， $D=1-z-yz^2$ 。另令 $R_0=1$ 、 $R_1=1+y$ ，且使用相同遞迴，生成函數為 $(1+yz)/D$ 。直接對 y 微分得到 z/D^2 ，因此比對係數即有 $(B^*B)_n=R'_{n+1}(y)$ 。這補充了原文的係數計算證明。

數值例子與一般公式的參數慣例

$y=1$ 時， B 是 1,1,2,3,5,⋯，自卷積是 1,2,5,10,20,38,⋯； $y=2$ 時，本篇 Jacobsthal 型初值給 $B=1,1,3,5,11,⋯$ ，卷積是 1,2,7,16,41,94,⋯。一般 Theorem 8 可清楚寫成：先將 $A=cy+d$ 固定，對新變數 t 微分 $Q_{n+1},\{A,a,A\}(t)$ ，最後令 $t=y$ 。若把 $A(y)$ 一起微分會額外產生項，與該公式不同。

閱讀重點與來源

這篇的價值在於同一二階遞迴可以同時用有限和、特徵根、字串分類與生成函數理解。讀者應分清多項式變數與固定參數、穩定性與個別初值軌跡，以及有界、週期、收斂三者。來源：Michelle Haver、Kathleen Lee、William McDermott、Alexander Wilson、Wei-Hsuan Yu、Aklilu Zeleke，Closed Forms of Recursive Polynomials and Applications，Ars Combinatoria 142 (2019), 175–195。