

新相對上界與緊調和指標 4 設計的不存在性

arXiv:1409.6995v1 (2014) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要結論

球面調和指標 4 設計是單位球面上的有限點集 X ，要求每個四次齊次調和多項式在 X 上的總和為零。它不必滿足一至三次的矩條件。已知點數下界為 $(n+1)(n+2)/6$ ，達到等號才稱緊設計。Okuda 與 Yu 證明：環境維度 $n \geq 3$ 時，緊調和指標 4 設計不存在。這不是排除所有此類設計，而是排除下界取等號的極端配置。

二維例外與固定角度轉換

$n=2$ 時，取圓上的角度 $0, \pi/4$ 兩點， $\cos 4\theta$ 的總和與 $\sin 4\theta$ 的總和都為零，恰好達到兩點下界。高維緊性則迫使不同點的內積為 $\pm\alpha$ ，其中 $\alpha^2=3/(n+4)$ ，所以點集同時構成固定角度的等角直線系統。先前結果把 $n \geq 3$ 的剩餘候選限制成 $n=3(2k-1)^2-4, k \geq 3$ ，角度參數 $\alpha=1/(2k-1)$ 。

經典相對界為何不足

等角直線的一般 Gerzon 上界為 $n(n+1)/2$ ；固定角度的 Lemmens–Seidel 相對界為 $n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ ，但要求 $n\alpha^2 < 1$ 。在候選族中 $n\alpha^2=3-4/(2k-1)^2 > 1$ ，因此經典相對界不能使用。把負分母公式當成有效上界是不合法的。作者改由三點 SDP 的必要條件推導適用於另一參數區間的新界。

新相對上界與精確條件

設 $D_-= (n-2)\alpha^2+6\alpha-3$ ， $D_+= -(n-2)\alpha^2+6\alpha+3$ 。若 $n \geq 3, 0 < \alpha < 1$ 且 D_-, D_+ 都嚴格為正，則 $M\alpha(n) \leq 2 + [(n-2)/\alpha] \max\{(1-\alpha)^3/D_-, (1+\alpha)^3/D_+\}$ 。等價的維度條件是 $2 - (6\alpha-3)/\alpha^2 < n < 2 + (6\alpha+3)/\alpha^2$ 。這是開區間，端點分母為零，不能直接套用；兩個分支必須取最大值。

把設計所需點數壓到上界之外

代入 $n_k=3(2k-1)^2-4, \alpha_k=1/(2k-1)$ ，作者得到 $M\alpha_k(n_k) \leq B_k=2(k-1)(4k^3-k-1)$ ，對每個 $k \geq 2$ 成立。緊設計需要 $T_k=(n_k+1)(n_k+2)/6$ 點，而差值可分解為 $T_k-B_k=2(k-1)(2k-1)(4k^2-4k-1) > 0$ 。於是所有先前剩下的候選都矛盾。例如 $n=71$ 需要 876 點，但新上界只有 416。

新相對上界與緊調和指標 4 設計的不存在性

arXiv:1409.6995v1 (2014) | 兩頁中文導讀

從完整 SDP 取出足夠的限制

原始 Bachoc–Vallentin 型 SDP 使用六個非負三點分布變數、計數矩陣、兩點線性限制與各階矩陣核。本篇沒有求解全部條件，而只保留計數矩陣行列式非負，以及一個核矩陣對角元素 $(S_3^n)_{1,1}$ 非負。這會擴大可行域、可能弱化上界，但若留下的限制已足以證明不存在性，就不需要更多條件。

合併變數後的第一條不等式

令 $u=(x_1+x_2)/3$ 、 $v=x_3+x_5$ 、 $w=x_4+x_6$ ，目標線數為 $1+u$ 。計數矩陣是 $W=[[1,u],[u,u+v+w]]$ ，所以 $\det W \geq 0$ 等價於 $v+w \geq u(u-1)$ 。這是直接展開二階行列式得到的限制，不涉及數值最佳化或近似證書。所有合併變數都非負。

第二條不等式來自一個核元素

用原文 Lemma 3.4 的明確公式，約去公共正因子後得到 $Cu - Av - Bw \geq 0$ ，其中 $C=(n-2)(1-\alpha^2)^3/\alpha$ ， $A=(1-\alpha)^3 D_+$ ， $B=(1+\alpha)^3 D_-$ 。主定理條件使 A 、 B 都正。令 $m=\min\{A,B\}$ ，由 $v,w \geq 0$ 得 $Cu \geq m(v+w) \geq mu(u-1)$ 。若 $u > 0$ ，可除以 u ，得到 $1+u \leq 2+C/m$ ； $u=0$ 則直接成立。

代數化簡完成主定理

由 $C/\min\{A,B\} = \max\{C/A, C/B\}$ ，再用 $(1-\alpha^2)^3 = (1-\alpha)^3(1+\alpha)^3$ 約分，就得到兩分支的新相對界。若 $\alpha=1/l$ 、 $n=3l^2-4$ ，兩分式簡化為 $(l-1)^2/6$ 、 $(l+1)^2/6$ ，後者較大；外部 $n-2=3(l^2-2)$ ，因此得到可以對任意 l 手算的公式。取 $l=2k-1$ 即為推論的四次多項式上界。

方法價值與來源

本篇示範如何把 SDP 的結構濃縮成兩條簡單不等式，將早期有限維數值觀察提升成覆蓋無窮候選族的解析證明。核的正規化不可與其他版本混用；作者也未聲稱完全解釋為何所選核分量特別有效。來源：T. Okuda and W.-H. Yu，arXiv:1409.6995v1 (2014)；期刊版 A new relative bound for equiangular lines and nonexistence of tight spherical designs of harmonic index 4，European Journal of Combinatorics 53 (2016), 96–103。