

Lemmens–Seidel 猜想與禁子圖

arXiv:2003.07511v1 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與完整答案

本文研究固定共同角度 $\arccos(1/5)$ 的等角直線。取各線的單位代表向量，任兩不同向量的內積為 $\pm 1/5$ 。令 $N_{1/5}(r)$ 為 R^r 中此類直線的最大數，作者完整證明1973年的 Lemmens–Seidel 猜想： $23 \leq r \leq 185$ 時 $N_{1/5}(r) = 276$ ； $r \geq 185$ 時 $N_{1/5}(r) = \lfloor (3r-3)/2 \rfloor$ 。兩式在185維相接。這是固定角度的最大值，與允許任意角度的最大線數不同，也比「某配置已不能擴充」的飽和性更強。

幾何轉成譜與秩

Gram 矩陣可寫成 $G = I + S/5$ ，其中 Seidel 矩陣 S 的對角為0、非對角為 ± 1 。正半定條件等價於 $\lambda_{\min}(S) \geq -5$ ，配置張成維數則是 $\text{rank}(S+5I)$ 。 $n > r$ 時 G 必奇異，故最小特徵值恰為 -5 。主定理敘述為： $n \geq 277$ 時 $\text{rank}(S+5I) \geq \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$ 。完整證明對所有可能的大系統分支實際提供較強的 $\text{rank} \geq 2n/3 + 1$ ；剩餘分支直接證明 $n \leq 276$ 。配合既有建構，就得到猜想中的精確最大值。

切換與真正剩下的情形

若以內積 $-1/5$ 表示圖的邊， $S = J - I - 2A$ 。反轉部分向量相當於切換圖中某個頂點集合與補集間的邊非邊，譜與秩不變。 $\alpha([S])$ 、 $\omega([S])$ 是整個切換類的最大獨立數與最大團數。交錯定理排除 K_7 ，故 $\omega \leq 6$ ； $\omega = 2, 3, 5, 6$ 的情形已有足夠秩界。本文的新工具主要封住 $\omega = 4$ ，並逐步將可能反例壓到 $\alpha \leq 28$ 。

禁子圖提供可計算的局部障礙

若一個誘導子圖的最小 Seidel 特徵值低於 -5 ，則包含它的圖也不合法。作者使用這種極小禁子圖族 F_{-5} 中的一批成員，而非列舉全族。例如星圖 $K_{1,r}$ 加 s 個孤點及 t 條獨立邊，當 $r \geq 2$ 、 $s+t \geq 1$ 時，合法的充要條件為 $(r-4)(s+4t-4) \leq 36$ 。 $K_{1,5}$ 加41個孤點使左側為37，因此被排除。此類簡單式來自 equitable quotient 與行列式。

從局部結構削減反例

誘導子圖 H 若有 adjacency 譜半徑大於2，完全不鄰接 H 的遠方 $R(H)$ 就有譜半徑小於2，受到森林結構限制。利用這一點，作者先處理低最大度數、大獨立集及三角形自由圖。對 $\omega = 4$ 的剩餘情形，再由大鄰域迫使小型禁子圖出現，先證 $\alpha \geq 39$ 已有秩界，接著改善到 $\alpha \geq 29$ 。因此只需證明 $\omega = 4$ 、 $\alpha \leq 28$ 的圖不可能超過276點。

四點基底與七個柱

選一個 K_4 基底，按外點在基底的鄰接集合分柱，並利用切換辨認互補集合。外點分成四個一點柱與三個二點柱。空鄰接柱不存在，否則可切換成 K_5 。用 $S+5I$ 作為 Gram，將向量拆成基底投影與正交剩餘部分後，同一點柱的剩餘向量互相正交，平方長度為4；跨柱剩餘內積只有 $-4/3$ 、 $2/3$ 。這使柱的大小可由小型正半定矩陣限制。

19、68、20 三個關鍵數字

若兩個一點柱之間有邊，其餘每個一點柱至多19點。證明把對邊兩端的四種鄰接型計數化成行列式不等式，再利用整數性。另一方面，二點柱切換後與兩條獨立邊不相鄰，其柱圖三角形自由且獨立數 ≤ 26 。禁子圖分析給柱大小 ≤ 68 ；若大小 ≥ 66 ，柱內每條邊兩端的度數和 ≤ 20 。這些都是後續需要同時使用的限制，不能只保留68的點數上界。

gallery 讓不同柱互相制約

一條無共同鄰點的邊，其兩端共同非鄰點所誘導的圖稱為 gallery。在其中選另一條邊，可重新拆成兩個一點柱、一個二點柱和兩個端點。若 gallery 最大度數 ≤ 20 ，作者證明其大小 $\kappa \leq 105$ ；若等號成立，還存在兩端度數都為20的邊。這個等號資訊十分重要，因為它能在重選基底後，把特定二點柱的大小從68降到65。

最終計數如何得到276

若任何基底的一點柱 ≥ 20 ，19界迫使其餘三柱聯集獨立，故 $n \leq 4 + 2 \times 28 + 3 \times 68 = 264$ 。否則所有一點柱 ≤ 19 ，gallery 最大度數 ≤ 20 。若某 gallery 有105點，等號資訊使一個二點柱為65，四個gallery的計數給 $n \leq 4 \times 105/2 + 65 = 275$ ；若全部 ≤ 104 ，同一計數式給 $n \leq 4 \times 104/2 + 68 = 276$ 。這便排除最後的反例分支，完成整個猜想。

意義、數值與閱讀提醒

固定角度最大值在100維與185維均為276，186維為277，200維為298。證明的特色不是搜尋所有配置，而是用譜禁子圖、柱的局部界與gallery的全域計數逐層排除反例。來源：Meng-Yue Cao、Jack H. Koolen、Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，The Lemmens-Seidel conjecture and forbidden subgraphs，Journal of Combinatorial Theory, Series A 185（2022）。本導讀依 arXiv:2003.07511v1（2020年3月17日）全文，未宣稱重新執行原文全部計算。