

等角直線與 Lemmens–Seidel 猜想

arXiv:1807.06249v4 (2019) | 兩頁中文導讀

研究問題與完成範圍

本篇研究內積為 $\pm 1/5$ 的實等角直線系統。Lemmens–Seidel 猜想預測 $23 \leq r \leq 185$ 時最大值是 276， $r \geq 185$ 時為 $r+1+\text{floor}((r-5)/2)$ 。基底大小 K 是所有 switching 等價圖中最大的負內積 clique 大小；此角度下 $K \leq 6$ 。作者補上 $K=3$ 、5 的證明，並改善 $K=4$ 的部分上界。因此本篇不是整個猜想的完整解決。

柱分解如何整理幾何

固定 K -base P ，依每個向量與 P 的內積符號模式分類成柱。向量可寫成 $x=h+c$ ，其中 h 在基底張成空間、 c 與該空間正交；同柱的 h 相同。兩個殘差內積等於原內積減去投影內積，所以剩下的是低維、少數內積值的配置。 $(K,1)$ 柱內原內積只能為 $+\alpha$ ，否則兩點加上共同的 $K-1$ 個負鄰居會形成更大基底。

Schur 補給跨柱限制

若區塊矩陣左上角 A 正定，整體正半定等價於 $C-B^T A^{-1} B$ 正半定。特殊參數 $\alpha=1/(2n+1)$ 、 $K=n+2$ 讓同一 $(K,1)$ 柱的正規化殘差互相正交；跨柱內積是 $1/[n(n+1)]$ 或 $-1/(n+1)$ 。另一柱只要至少有兩點，就可用二階 Schur 補壓住柱大小： $n \leq 3$ 時至多 $2n^2(n+1)$ ， $n \geq 3$ 時至多 $n^2(n+1)^2/2$ 。

$K=3$ ：有限枚舉與秩的分工

$K=3$ 有三個 $(3,1)$ 柱，同柱正規化殘差內積為 $1/10$ ，跨柱則為 $1/4$ 或 $-1/5$ 。作者用另一柱四個測試點，將候選分成 16 種模式，再由四階 Schur 補與有限枚舉證明另一柱至多 54 點。若兩柱都至少四點，總數至多 165；否則只有一大柱，其殘差秩限制給總數至多 $r+6$ 。故 $|X| \leq \max\{165, r+6\}$ 。

$K=4$ 的結果為何還不夠

特殊正交柱界在 $\alpha=1/5$ 、 $K=4$ 時給單柱 24 的上界，但需要另一柱至少兩點。作者控制四個 $(4,1)$ 柱的總點數，再把三個 $(4,2)$ 柱轉成內積 $1/13$ 、 $-5/13$ 的兩距離集合，得到 $|X| \leq 100+3s(r-4, 1/13, -5/13)$ 。這仍不足以完成猜想，因為忽略基底大小與跨柱相容性後，單柱模型會容許原問題不接受的構造。

等角直線與 Lemmens–Seidel 猜想

arXiv:1807.06249v4 (2019) | 兩頁中文導讀

K=5 與 276 線的唯一性

五個 (5,1) 柱共至多 15 點。先移除這些柱，再加 $p_6 = -\sum p_i$ ，讓 (5,2) 柱變成輔助集合 Y 的 (6,3) 柱。若有多柱且 $|Y| > 258$ ，已知分類使 Y 嵌入唯一的 276 線系統。該系統有 90 個不相交三角形，至多刪去 17 點仍會留下三角形，進而逼出原 X 的六點基底，矛盾。因此多柱分支 $|X| \leq 272$ ，單柱分支則以譜方法得 $|X| \leq 4r/3 + 12$ 。

恰秩與環境維度不能混用

$M(r)$ 允許配置張成的維度小於 r ； $M^*(r)$ 則要求恰好張成 r 維。雖然 $M(8)=28$ ，那些最大配置只張成 7 維，因此不能直接推出 $M^*(8)=28$ 。 $M(r)$ 隨環境維度不減，但 $M^*(r)$ 沒有同樣的簡單單調性。這篇另一主題便是求出恰秩 8、9、10 的最大線數。

推廣 Neumann 定理的角度限制

若 $r > 3$ 且 $|X| > 2r-2$ ，偶數 r 時 $1/\alpha$ 必為奇整數；奇數 r 時，還可能是 $\sqrt{2r-1}$ 。證明取 $2r-1$ 個向量，其整數 Seidel 矩陣的 $-1/\alpha$ 特徵值重數至少 $r-1$ 。若它無理，代數共軛的重數迫使最小多項式只能為二次；再以跡、平方跡、正半定性與行列式模四條件，排除其他可能。

Conference 例外與完全搜尋

平方根例外可把 $2r-1$ 個向量補成 $2r$ 個向量的 ETF，來自對稱 conference 矩陣；其階數條件迫使 r 是奇數。角度限制結合相對界，把恰秩最大值化為有限角度的搜尋。固定正定基底後，候選向量由內積符號決定，再用相容圖最大 clique 求延伸；只有覆蓋全部基底類別才可得到全域結論。單一飽和配置本身不代表最大。

最終結果與原文來源

作者得到 $M^*(8)=14$ 、 $M^*(9)=18$ 、 $M^*(10)=18$ 。恰秩 9 的 18 線可由 $\alpha=1/\sqrt{17}$ 的 Paley 構造達到；恰秩 8 的 $\alpha=1/3$ 搜尋檢查 1044 個七點圖，留下三個正定基底類別。這些枚舉數字來自原文，導讀沒有宣稱重跑全部計算。來源：Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，arXiv:1807.06249v4 (2019)；Discrete Mathematics 343(2) (2020), 111667，DOI:10.1016/j.disc.2019.111667。