

避開原點的超平面覆蓋：穩定性與精確最小值

arXiv:2306.07574v1 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題：每個非零頂點都蓋 k 次

超立方體 $Q_n = \{0,1\}^n$ 有 2^n 個頂點。選一批不經原點的超平面，使每個其他頂點至少被覆蓋 k 次，最少要幾個？記答案為 $f(n,k)$ 。這裡允許平面重複，應視為多重集合；同一平面使用兩次便貢獻兩次覆蓋。本文研究接近最優的平面長什麼樣，並把結構資訊用於精確覆蓋。

加權法先給通用下界

對具有 t 個1的非零頂點 x ，給權重 $w(x) = 1/[t \cdot C(n,t)]$ 。所有非零頂點的總權重為 $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ 。Clifton–Huang證明每個避開原點的平面所含頂點總權重至多1，所以 k 重覆蓋至少要 $\text{ceil}(kH_n)$ 個平面。這把幾何覆蓋轉成一個簡潔的分數計數下界。

第一個主結果：完全刻畫滿權重平面

把平面正規化成 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 1$ 。來源證明權重恰為1，當且僅當每個 c_i 都是不大於1的整數，且 $\sum c_i \geq 1$ 。負係數可以出現，例如 $n=3$ 時 $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ 仍有滿權重。條件不是全部係數都等於0或1，這點對完整列舉最有效率的平面很重要。

滿權重平面的數量可以直接算出

令 $d_i = 1 - c_i$ ，則 d_i 是非負整數且 $\sum d_i \leq n - 1$ 。由隔板法，滿權重平面共有 $C(2n-1, n)$ 個。 $n=6$ 時只有462個候選；與從63個非零頂點任選6點猜平面的龐大空間相比，縮減非常明顯。這種先證結構再做整數規劃的策略，是本文計算部分能有效推進的原因。

穩定性：不滿權重就至少損失 $1/n$

來源Theorem 1.3進一步證明，不是滿權重的平面，其權重至多 $1 - 1/n$ ，而且缺口可達。換言之，不存在權重任意貼近1的非最優平面。這種離散缺口比單純上界1提供更多資訊：若整個覆蓋幾乎達到下界，便只能容許極少數次使用非滿權重平面。

避開原點的超平面覆蓋：穩定性與精確最小值

arXiv:2306.07574v1 (2023) | 兩頁中文導讀

證明工具：用排列鏈記錄權重

每個頂點可對應集合，隨機排列產生從空集合到全集的鏈。加權平面截面可透過排列中部分和的行為來計數。作者區分有貢獻、無貢獻與重複的排列，證明非極值平面至少有 $(n-1)!$ 個排列造成缺損，除以 $n!$ 便得到 $1/n$ 。這延續LYM型方法，但需要精細辨認平面係數的結構。

六維的精確結果與例外剩餘類

$H_6=49/20$ 。來源得到： $k \geq 65$ 且 k 不與2或11模20同餘時， $f(6,k)=\text{ceil}(49k/20)$ 。關鍵基礎構造使用49個平面，將63個非零頂點各蓋20次；再藉加入此覆蓋的次可加性，從有限基例延伸至無窮 k 。兩個例外剩餘類不能省略，也不能說所有六維參數已完全解決。

附錄構造可逐點精確驗證

導讀檢查來源附錄列出的49個整數係數平面：各平面皆避開原點，係數不大於1且總和至少1；逐一代入63個非零0-1頂點，每點覆蓋次數均為20。驗證使用整數等式，無浮點容差。這同時確認 $49=20H_6$ ，整個構造確實達到分數權重下界，並提供後續覆蓋拼接的可靠基塊。

缺口還能使整數下界增加1

令 $\delta=\text{ceil}(kH_n)-kH_n$ 。來源Theorem 4.1指出，若 $0<\delta<1/[n \cdot C(n-1, \text{floor}(n/2))]$ ，原下界還需增加1。思路是總剩餘權重太小，無法容納任何非滿權重平面的缺損或任何頂點多蓋一次的最小權重。配合 H_n 分母的算術性質，可在每個足夠大的維度，為無窮多個 k 改進舊下界。

研究意義與後續方向

本篇示範穩定性如何同時服務理論與計算：刻畫極值物件、量化離極值的缺口、縮小整數規劃候選，最後推到精確構造與更強下界。後續可研究更廣的接近滿權重平面，以及尚未決定的六維參數。來源：Das、Djaljapayan、Lin、Yu，arXiv:2306.07574v1（2023年6月），15頁。