

等距碼的剛性：從正單純形到向日葵

arXiv:2504.07036v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：每一對碼字都相隔同樣遠

q 元Hamming空間由長度 n 、每位置 q 種符號的字串組成，距離是不同位置數。等距碼要求任兩個不同碼字距離恰為 d ，而不只是最小距離至少 d 。本文一方面研究Delsarte上界何時可能取等號，另一方面利用集合系統的結構，把長度夠大、距離固定時的上界顯著壓低。

經典上界與特殊的達界距離

Delsarte上界為 $|C| \leq n(q-1)+1$ 。作者證明若達到 $n(q-1)+1$ 個碼字，其共同距離必為 $d = \lceil n(q-1)+1 \rceil / q$ 。換言之，除這個特殊距離外，上界可減為 $n(q-1)$ 。必須使用這個分子含 $+1$ 的式子；本文導讀按主要定理與證明處理來源介紹段落中不一致的寫法。

把每種符號嵌入一個正單純形

將 q 種符號映成 $\mathbb{R}^{q-1}$ 的 q 個單位向量，不同向量內積為 $-1/(q-1)$ 。串接 n 個位置並除以 $\sqrt{n}$ ，便把碼字映入 $\mathbb{R}^{n(q-1)}$ 的單位球面。Hamming距離 d 對應共同內積 $\lambda = 1 - qd/[n(q-1)]$ 。離散字串問題因此化為具有單一非對角內積的Gram矩陣問題。

Gram矩陣的秩迫使例外參數

若 $m = |C|$ ，Gram矩陣為 $(1-\lambda)I + \lambda J$ 。其特徵值為 $1-\lambda$ （重數 $m-1$ ）及 $1+(m-1)\lambda$ 。當 $m = n(q-1)+1$ 時，嵌入維度只有 $m-1$ ，故最後一個特徵值必為0，解出特殊距離。這是一個短而透明的線性代數證明，不需要逐一分類所有 q 元碼字。

有限域單純形碼說明特殊情況真的存在

q 為質數冪時，經典單純形碼給 $n = (q^k - 1)/(q - 1)$ 、 $m = q^k$ 、 $d = q^{k-1}$ ，恰符合達界條件。例如 $q=3$ 、 $k=2$ 時，長度4有9個碼字，共同距離3。這個例子顯示特殊距離不能一概刪除；它也說明達界構造依賴參數，不是任意 q 、 n 都自動存在。

等距碼的剛性：從正單純形到向日葵

arXiv:2504.07036v1 (2025) | 兩頁中文導讀

第二條工具：等交集系統與向日葵

把碼字先視為定重的 q 元集合；若任意兩個集合交集大小固定，足夠大的家族可能被迫形成向日葵：所有成員共用同一核心，核心以外的花瓣兩兩不交。作者將 q 元符號轉成二元區塊，以Deza–Frankl類結構定理辨認這種剛性，再把二元核心拉回原來的 q 元系統。

符號轉換必須保留距離與交集

來源用一個 q 位元區塊表示每個符號：零符號映為零，其他符號映成兩個1的向量，共用其中一個位置。這使非零符號的權重固定，兩兩距離按規律放大。大於 $q-1$ 的家族排除某些只有單一位置的假核心，從而確保所得向日葵確實對應原 q 元碼，而不是編碼方法額外製造的現象。

新的統一上界與大長度門檻

作者得到 $|C| \leq \max\{d^2+d+2, q, \text{floor}(2n/d)\}$ 。因此若 $n \geq \max\{d(d^2+d+2)/2, dq/2\}$ ，便有 $|C| \leq \text{floor}(2n/d)$ 。這與經典約 $n(q-1)$ 的上界相比，在固定 d 且 n 大的情況改善顯著。前面的常數項與門檻是結構定理的必要適用條件，不應把 $2n/d$ 當成所有短碼的普遍上界。

達界構造要明確限定偶數距離

d 為偶數時，把座標分成互不相交、各 $d/2$ 個位置的區塊，每個碼字在一塊放1，其餘放0，可得 $\text{floor}(2n/d)$ 個兩兩距離 d 的碼字。奇數 d 沒有整數大小的 $d/2$ 花瓣，不能照搬此達界敘述。來源部分概括文字未突顯此限制，本導讀將上界與偶數 d 的緊性分開，避免宣稱奇數距離也有同樣線性達界家族。

成果意義：兩種剛性服務不同尺度

Gram秩揭示接近Delsarte極值時的幾何剛性；向日葵揭示固定距離、長度很大時的組合剛性。兩條路各有適用區間，結合後得到更完整的等距碼圖像。後續可研究門檻是否能降低，以及特殊參數的達界分類。來源：Hu、Huang、Yu，arXiv:2504.07036v1（2025年4月），10頁。