

球面調和指標 T 設計：下界與算術障礙

arXiv:1507.05373v2 (2015) | 兩頁中文導讀

只指定某些球諧階數

球面調和指標 T 設計是單位球面上的有限非空點集 Y ，要求對每個 $k \in T$ 與每個 k 次齊次調和多項式 f ，都有 $\sum_Y f(y) = 0$ 。普通 t -design 相當於 $T = \{1, \dots, t\}$ ，但本篇允許只挑選若干階數，因此未指定的低階矩不必消失。研究目標是建立點數下界，並判斷達到下界的緊設計是否存在。排除緊設計並不等於排除所有 T -design。

核函數如何產生下界

本篇使用 $Q_{n,k}(1) = \dim \text{Harm}_k$ 的 Gegenbauer 正規化。加法公式給 $M_k = \sum_{x,y} Q_{n,k}(\langle x, y \rangle) \geq 0$ ，且設計指定階的 $M_k = 0$ 。若 $F = \sum f_k Q_{n,k}$ 在 $[-1, 1]$ 非負、 $f_0 > 0$ ，並且 T 外的正階係數非正，則 $NF(1) \leq \sum_{x,y} F(\langle x, y \rangle) \leq N^2 f_0$ ，故 $N \geq F(1)/f_0$ 。取等號迫使所有非對角內積是 F 的零點。

單一指標 6 與 8 的不存在性

對單一偶數指標 $2e$ ，令 $c = -\min Q_{n,2e}$ ，則 Fisher 型界為 $b = 1 + Q_{n,2e}(1)/c$ 。高維緊性迫使內積只有 $\pm \alpha$ ，於是 Gerzon 線數上界 $n(n+1)/2$ 可用來與下界比較。指標 6 在 $n \geq 37$ 、指標 8 在 $n \geq 20$ 時已矛盾。剩餘小維度再用點數整數性；指標 6 的 $n=24$ 、231 點候選，其平方距離比 $1/3$ 又違反 LRS 條件。

二維例外與漸近定理的量詞

上述結果是 $n \geq 3$ 無指標 6 或 8 的緊設計。二維圓上取角度 $0, \pi/(2e)$ 的兩點，會使 $\cos(2e\theta)$ 與 $\sin(2e\theta)$ 的總和同時為零，因此存在兩點例外。另一方面，固定 $e \geq 3$ 再令 n 增長，Gegenbauer 到 Hermite 的尺度極限給出 $b_{n,2e}$ 為正常數乘 n^e ，終將超過 $O(n^2)$ 上界。這不是對所有 e 同時成立的統一維度門檻。

多指標的緊性需要說清楚

作者調整多個 Q 的係數，使多個位置同時達到全域極小值，藉此定義相應 Fisher 型界與緊性。這是特定多重極小值框架，不保證等於所有 LP 多項式中的最佳界；某些維度甚至無法形成指定的多項式。對 $T = \{8, 4\}$ ，平方因式分解導出可能內積 $\pm \alpha$ 、 $\pm \beta$ ，以及 $b = (n+1)(n+2)(n+5)(n+6)/252$ 。

球面調和指標 T 設計：下界與算術障礙

arXiv:1507.05373v2 (2015) | 兩頁中文導讀

從少距離結構到算術障礙

$\{8,4\}$ 的根滿足 $\alpha^2 + \beta^2 = 14/(n+12)$ 、 $\alpha^2\beta^2 = 21/[(n+8)(n+12)]$ 。點數足夠大時，Nozaki 型定理要求若干平方差比值是整數；更強的有理性還有更大的點數門檻。作者用這些條件、同餘限制與對蹠化，把大維度問題化成有限的算術模式。套用整數性前不能省略尺寸假設。

橢圓曲線與小維度 SDP 的分工

其中一個模式要求 $y^2 = (n+5)(n+8)(n+12)$ 。令 $x = n+8$ ，得到橢圓曲線 $y^2 = x^3 + x^2 - 12x$ ，作者引用整數點資料排除候選。 $9 \leq n \leq 75$ 的必要比值檢查失敗；更小維度唯一剩餘整數目標是 $n=8$ 的 65 點，但原文報告 SDP 上界 50.23。因此相應 $\{8,4\}$ 緊設計不存在。本導讀是在解釋原文計算，沒有宣稱重新產生精確證書。

一個短而有力的整數性證明

若 N 個單位向量的非對角內積屬於 $\{0, \pm\alpha\}$ 且 $N > 2n$ ，則 $1/\alpha$ 是整數。證明：Gram 矩陣 G 的秩最多 n ，所以整數對稱矩陣 $A = (G - I)/\alpha$ 有特徵值 $-1/\alpha$ ，重數至少 $N - n > N/2$ 。若它有另一個代數共軛，共軛重數相同，總重數就超過 N ，矛盾。因此它是有理代數整數，必為整數。結論不要求奇數。

其他集合與數值精度

對 $\{6,2\}$ ，目標為 $n(n+4)(2n+1)^2/[15(7n-4)]$ ，且 $\alpha^2 = 15/[2(n+8)]$ 。結合點數與角度整數性，作者排除 $n \geq 3$ ； $n=2$ 的正交兩點仍是例外。文中也處理 $\{8,6\}$ 、 $\{8,2\}$ 、 $\{10,6,2\}$ 等情形。 $\{8,2\}$ 在 $n=4$ 的目標是 9，而報告的 SDP 值是 8.9981，必須保留嚴格差距，不能四捨五入成 9。

尚未解決的候選與原文來源

對 $\{12,8,4\}$ ，本篇留下 $n=9$ 、13、16 三個未解決維度，目標分別是 285、1311、3315；上下界相合本身不是構造。本段只說明該版本的狀態。來源：Yan Zhu、Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Kyoung-Tark Kim、Wei-Hsuan Yu，arXiv:1507.05373v2 (2015)；期刊版 On spherical designs of harmonic index T，Electronic Journal of Combinatorics 24(2) (2017), P2.14。