

多項式何時容得下一整片乘積？

arXiv:2605.22320v1 (2026) | 兩頁中文導讀

研究問題：代數結構如何控制離散交點？

給多項式 $F(x,y,z,t)$ ，考慮它的零集合與 $P \times Q$ 相交多少次，其中 P 、 Q 各是 C^2 中的有限點集。若零集合包含兩條曲線的完整乘積，就能任取曲線上的 n 個點而得到 n^2 個交點。本文研究允許這種乘積結構的Cartesian多項式，以及通常不具此結構的non-Cartesian多項式，連結代數幾何、計算代數與組合幾何。

定義：Cartesian不是普通的變數可分離

F 為Cartesian，是指 $F=G(x,y)H_1(x,y,z,t)+K(z,t)H_2(x,y,z,t)$ ，其中 G 、 K 都非常數。等價地， F 屬於分別由兩組變數生成的理想 (G,K) 。例如 $F=x+z$ 屬於 (x,z) ，所以為Cartesian。定義取決於如何把變數分組；不能只因 F 同時含 x 與 z ，或有乘積項，就判定它是否Cartesian。

主要結論：一般位置下不具這種結構

來源證明對固定 $d \geq 2$ ， $C^2 \times C^2$ 上次數至多 d 的Zariski一般多項式為non-Cartesian。「一般」指避開某個真代數閉子集，不是對每一個係數選擇都成立，也不是對某個有限隨機生成器給出確切成功率。這說明完整曲線乘積的存在，是需要特殊代數關係的退化現象。

可檢查的充分條件來自纖維

固定 (z,t) ，得到兩變數纖維 $F_{(z,t)}(x,y)$ 。來源Theorem 3.1要求： F 不可約且非僅含 z,t ；只有有限多個可約纖維；每個纖維與其他纖維成比例的參數也只有有限多個。若存在Cartesian分解，在 $K=0$ 這條曲線上，幾乎所有不可約纖維都必為同一 G 的倍數，產生無限多個成比例纖維，與條件矛盾。

為何三次以上可用維度計數？

$d \geq 3$ 時，兩變數次數至多 d 的可約多項式在係數空間中有至少2的餘維。參數 (z,t) 只有2維，評估映射的纖維維度分析便使一般 F 的可約纖維只剩有限個。再比較最高次與次高次係數，可以用可逆 2×2 矩陣分辨 (z,t) ，排除不同參數給成比例纖維。這把「例外很少」轉成精確的代數維度論證。

多項式何時容得下一整片乘積？

arXiv:2605.22320v1 (2026) | 兩頁中文導讀

二次情形必須另外處理

一般二次 F 反而會有無限多個可約纖維，因此不能套用前段充分條件。來源改化成 $F=(x-z)^2+(y-t)^2+R(z,t)$ ， R 非零且次數至多2，證明Cartesian性等價於 R 可被 $z+it-c$ 或 $z-it-c$ 整除， c 為常數。一般 R 不含這類特殊線性因子，於是二次也得到non-Cartesian性。此處在複數域，不能把平方和當成實數非負量。

演算法：把存在分解轉成係數方程

作者利用有效Hilbert零點定理，加入新變數 u ，尋找 $q(1-uF)+q_1G+q_2K=1$ 的有界次數證書，再以係數比較及Gröbner基處理有限多項式系統。來源給乘積次數界 $\max\{(d+1)d^2, 27\}$ ，二次可改24。這提供可判定性的路線，不代表高次、多變數時運算一定快速。逆向理由應取 $G=K=0$ 且 $F \neq 0$ 時 $u=1/F$ 導出矛盾。

交點界與可精確數出的達階例子

在 $C^2 \times C^2$ ，既有non-Cartesian交點界為 $O_d(|P|^{2/3}|Q|^{2/3}+|P|+|Q|)$ 。本文給 $F=x^2+y^2+1-2ax-2by$ ：取 $Q=\{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, 2s^2\}$ 及 s^3 條 $b=ma+t$ 的直線，每條恰穿過 Q 中 s 點。為每條線解 $(m^2+1)y^2-2ty+1=0$ 並令 $x=-my$ ，得到 $|P|=s^3$ 、 $|Q|=2s^3$ 、交點數 s^4 ，達到平衡情況的 $n^{4/3}$ 量級。

高維不能照搬：非Cartesian仍可能有 n^2 交點

來源考察 $C^3 \times C^3$ 上的 $F=z-ax-by-c$ 。令 $P=\{(i,0,0)\}$ 、 $Q=\{(0,j,0)\}$ ，則任意一對都使 $F=0$ ，交點恰為 n^2 。高維的超曲面乘積條件，並未排除低維曲線乘積，所以仍需額外纖維或一般位置假設。作者另研究高維一般多項式：各塊維度至少2時，最大塊維度 $\geq$ 塊數，或 $d \geq \max\{2k-3, 7\}$ ，可得到一般非Cartesian性。

研究意義與版本中仍應核對之處

本文把退化結構的稀有性、代數判定與可達交點例子放在同一框架。Cartesian多項式族甚至不閉：若 F 非Cartesian， $(1+x/n)F$ 卻皆Cartesian並收斂到 F 。導讀保留交點界的加法項，避免在點數不平衡時誤用；來源高維Theorem 4.3的展示式未列對應項，完整適用條件仍宜核對。來源：Shen、Truong、Yu，arXiv:2605.22320v1（2026年）。