

四點半正定方法：等角直線的上界與唯一性

arXiv:2203.05828v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：相同角度的直線能放多少條？

在 R^d 中，取通過原點且兩兩夾角相同的直線。每條選單位方向後，不同向量內積為 $\pm\alpha$ ；固定 α 的最大條數記 $N_\alpha(d)$ 。本文利用四點之間的相容性改進上界，並從達界情況反推出構型維度與唯一性。固定角度的問題不同於容許所有角度的最大條數 $N(d)$ 。

從三點上界推進到四點

對奇整數 $a \geq 3$ 、 $\alpha = 1/a$ ，既有三點方法給 $N_{(1/a)}(d) \leq M(a) = (a^2 - 1)(a^2 - 2)/2$ ，適用到 $D_3(a) = 3a^2 - 16$ 。本文把範圍擴大到 $\text{floor}(D_4(a))$ ， D_4 是Theorem 4.1明列四次多項式 g_a 的最大實根，漸近為 $3a^2 + (12/\sqrt{5})a - 948/25 + O(1/a)$ 。這增加了隨 a 成長的適用維度區間。

小參數顯示改進幅度

$a=3$ 時，28條上界從維度11推進到14； $a=5$ 時，276條從59推進到64； $a=7$ 時，1128條從131推進到144。整數維度必須取實根下整數，不能四捨五入。來源也說明既有數值SDP在65、145等端點仍更強，因此本篇解析公式的範圍不能與那些數值結果混為一談。

有限內積讓矩陣不隨截斷膨脹

一般三點SDP以單項式向量形成矩陣，大小隨截斷次數增加。對僅有 s 種內積的集合，作者改用有限內積值上的評值基底。插值使任意指定值能由多項式表達，所以限制可壓成 $(s+1) \times (s+1)$ 矩陣；當舊截斷至少 s 時，兩種表達有相同限制力。此想法可推廣到更高點數。

幾何核心：投影到基準向量的正交補

固定 m 個獨立基準向量，Gram矩陣為 G 。其他向量的內積資料 u 、 v 、 t 投影後，剩餘內積分子為 $t - u^T G^{-1} v$ ，長度平方為 $1 - u^T G^{-1} u$ 等。以此建多變量Gegenbauer核，按 $(m+2)$ 點Gram型態加總得到半正定限制。四點情形是 $m=2$ ，不是把所有向量放進四維。

四點半正定方法：等角直線的上界與唯一性

arXiv:2203.05828v1 (2022) | 兩頁中文導讀

換號等價大幅減少局部型態

直線方向可換號，Gram矩陣因此變為 $\Lambda G \Lambda$ ， Λ 對角為 ± 1 ，直線集合本身不變。作者合併換號等價型態，藉核的奇偶性保留半正定性。三點可用兩類計數，四點再合併排列後只需三種計數 z_1 、 z_2 、 z_3 ，滿足 $z_1 + 6z_2 + z_3 = N(N-1)(N-2)(N-3)$ 。這讓解析證書成為可處理的小問題。

小型對偶證書推出明確上界

證明只需 $k=0$ 的 3×3 限制與 $k=3$ 的 2×2 限制。作者選半正定 F 及非負 f_1 、 f_2 ，使兩個矩陣配對之和恰為 $N(N-1)(M(a)-N)$ 。左側非負，故 $N \leq M(a)$ 。 F 的一維核取自達界構造規律，再由係數匹配求證書；控制其二階主子式非負的條件正是四次多項式 g_a 。

取等號迫使降維與規則組合結構

若 $d < D_4(a)$ 且 $N=M(a)$ ，非負配對皆須為零。秩2對偶 F 迫使配對的 3×3 矩陣只剩秩1，進而固定任意兩條線所見的局部型態數。選基準線、調整方向、投影並正規化後，得到強正則圖的球面嵌入。其Gram秩為 a^2-3 ，所以原本直線實際位於 a^2-2 維子空間。

唯一性必須保留角度與維度條件

$a=3$ 時得到強正則圖參數 $(27,16,10,8)$ ， $a=5$ 時為 $(275,162,105,81)$ 。結合這些圖的已知唯一性，來源證明角度參數 $1/3$ 且 $7 \leq d \leq 14$ 的28線構造唯一，以及角度參數 $1/5$ 且 $23 \leq d \leq 64$ 的276線構造唯一。唯一性忽略正交變換與方向換號；不代表所有角度、所有維度皆唯一。

研究意義與可延伸方向

本篇將數值最佳化背後的規律整理成適用無窮參數的解析證書，並展示上界取等號能帶出剛性結構。後續可研究更高點限制、其他少距離集合及強正則圖不存在性。上界公式本身不保證每個 a 都有達界構造。來源：Wei-Jiun Kao、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2203.05828v1（2022年3月），28頁。