

研究問題：兩種距離與均勻能量

框架容許比基底更多的向量，用冗餘係數表示訊號。若 N 個單位向量 x_i 位於 n 維實空間，且對任意 x 都有 $\sum |\langle x, x_i \rangle|^2 = (N/n) \|x\|^2$ ，就稱單位範數緊框架。本篇再要求不同向量內積只有 a 、 b 兩種，研究這種幾何配置能如何完整分類。主要假設是非等角： $a \neq -b$ ，且兩種內積確實不同。

主要成果與適用範圍

作者證明非等角二距離緊框架必來自強正則圖的球面嵌入。它或者本身是球面 2-design，或者平移、縮放後成為低一維的球面 2-design。固定強正則圖的譜分解給三個中心設計與相應的三個提升，共六種構造，其中含正則單純形的一距離退化情形。不能將這個數量誤讀成跨不同圖永遠有六個互不全等的嚴格二距離配置。

Gram 矩陣揭露緊框架結構

令 $G_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ 。緊性等價於 $G^2 = (N/n)G$ ，因此 G 的非零特徵值全部是 N/n ，重數為 n 。框架勢能 $FP = \text{tr}(G^2)$ 至少 N^2/n ，等號也恰好刻畫緊框架。這些矩陣條件把看似無窮多個方向的能量要求，化成一個可以直接驗證的平方恆等式。

非等角假設迫使正則性

設第 i 個向量有 k_i 個內積 a 的鄰居。由 $(G^2)_{ii} = N/n$ ，可得 $1 + k_i a^2 + (N-1-k_i)b^2 = N/n$ 。因 $a^2 \neq b^2$ ，解出 $k_i = [N/n - 1 - (N-1)b^2] / (a^2 - b^2)$ ，與 i 無關。因此以內積 a 定義的圖是正則圖。這個整數度數也是參數存在性的必要條件。等角時分母消失，翻轉向量可改變正內積度數，故不能省略假設。

重心只有兩種可能

正則性使 $G1 = t1$ ，而 G 只有 0 、 N/n 兩種特徵值，所以 t 也只能取這兩值。 $t=0$ 時， $\|\sum x_i\|^2 = 1^T G 1 = 0$ ，重心為零，配合二次矩條件得到球面 2-design。 $t=N/n$ 時，令 $c = (\sum x_i)/N$ ，則 $\|c\|^2 = 1/n$ 。所有向量位於共同超平面，平移 c 並除以 $\sqrt{(1-1/n)}$ ，便得到正交補上的 $n-1$ 維球面 2-design。

為何圖不只正則，而且強正則？

令 A 是內積 a 的鄰接矩陣，則 $G=(1-b)I+(a-b)A+bJ$ 。將它代入 $G^2=(N/n)G$ ，利用正則性給 $AJ=JA=kJ$ 與 $J^2=NJ$ ，可解出 A^2 位於 I 、 A 、 J 的張成空間。 A^2 的非對角元素就是共同鄰居數，因此只依賴該頂點對是否相鄰：相鄰者統一為 λ ，非相鄰者統一為 μ 。這正是強正則圖的定義。

投影構造所有球面嵌入

強正則圖的標準分解是平凡空間 $E_0=\text{span}\{1\}$ 與兩個非平凡空間 E_1 、 E_2 。把標準基底投影到 E_j ，再正規化，可得到球面嵌入。投影 P_j 的對角都是 n_j/N ，故 Gram 矩陣為 $(N/n_j)P_j$ 。任意球面嵌入可寫成三個互相正交嵌入的加權和，平方權重非負且總和為一；在兩內積參數平面上，這對應由三個線性正半定條件圍成的三角形。

設計條件使連續權重變成有限選擇

中心設計要求平凡分量為零。若只使用 E_1 或 E_2 ，得到兩種純投影設計；若兩者都使用，緊性要求平方權重為 $n_1/(N-1)$ 、 $n_2/(N-1)$ ，結果是正則單純形，所有非對角內積相同。每個 d 維中心設計還能提升成 $x_i=(\sqrt{[d/(d+1)]}y_i, 1/\sqrt{(d+1)})$ ，其新內積為 $(d\langle y_i, y_j \rangle + 1)/(d+1)$ 。這完成非零重心分支。

可手算的十點例子

三角圖 $\text{SRG}(10,6,3,4)$ 是 K_5 的邊相交圖。其四維投影產生十個向量，內積為 $1/6$ 、 $-2/3$ ，每點有六個第一類鄰居。這也可看成四維正單純形的邊中點。將它依提升公式放到五維，新內積分別成為 $1/3$ 、 $-1/3$ ，因此得到十向量的等角緊框架。此例顯示非等角中心設計可以提升成等角配置。

研究意義與來源

本篇以譜與矩條件連結框架理論、球面設計及代數圖論。若實作構造，可直接檢查單位對角、內積種類、Gram 平方恆等式與重心，並注意退化或重複點。來源：A. Barg, A. Glazyrin, K. A. Okoudjou, W.-H. Yu, Finite two-distance tight frames, arXiv:1402.3521v3 (2015)。導讀依此作者版本的定理編號與構造說明。