

從兩種距離到特徵值：歐氏與球面的上界

arXiv:2509.00858v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：知道距離比例後，能否壓低點數？

兩距離集合要求不同點間的距離只有兩種。若不固定距離，歐氏 R^d 的通用上界為 $C(d+2,2)$ ，單純形邊中點則提供 $C(d+1,2)$ 的下界。本文考慮更細的問題：距離比已指定時，能否用矩陣特徵值限制集合大小？作者同時處理不必共球的歐氏集合，以及單位球面上的兩內積集合。

Seidel矩陣把兩種關係寫成正負號

Seidel矩陣是實對稱矩陣，對角為0，非對角為 ± 1 。因此 r 階Seidel矩陣必有 $\text{tr}(S)=0$ 、 $\text{tr}(S^2)=r(r-1)$ 。這兩個跡恆等式把特徵值的總和與平方和固定下來；如果幾何再迫使某個特徵值具有大重數，留給其他特徵值的空間便受到限制。它是本文把組合資料轉成上界的核心工具。

歐氏集合：先移動一個基準點到原點

對 n 個點 $P_1, \dots, P_n$ ，取 $M_{ij} = \|P_i - P_n\|^2 + \|P_j - P_n\|^2 - \|P_i - P_j\|^2$ 。這是平移後向量Gram矩陣的兩倍，所以 M 半正定且秩至多 d 。將距離縮放為1、 δ 且 $\delta > 1$ ，依到基準點的距離分成兩群，加入秩至多2的區塊常數矩陣 D ，再平移及縮放得到 $n-1$ 階Seidel矩陣。

譜限制導出的歐氏相對界

令 $\gamma = (1+\delta^2)/(\delta^2-1)$ 。原文利用Weyl不等式與Cauchy-Schwarz得到 $(\gamma^2-d-1)(n-1) \leq (d+1)(\gamma^2-1)$ 。只有 $\gamma^2 > d+1$ 時，才能除以正分母，得到 $n \leq 1 + (d+1)(\gamma^2-1)/(\gamma^2-d-1)$ 。原文摘要未寫出這項必要條件，本導讀明列；若分母不為正，該分式不能當作點數上界。

固定參數的實例與整數條件

例如 $d=15$ 、 $\gamma=5$ ，也就是 $\delta^2=3/2$ ，上式給 $n \leq 1 + 16 \times 24/9$ ，取整數得 $n \leq 43$ 。這是固定距離比的結論，不是所有 R^{15} 兩距離集合只有43點。大量重複特徵值配合整數矩陣的代數共軛，可迫使 γ 為奇整數；本文展示的門檻較經典Neumaier門檻弱，因此不能宣稱改善了已知最佳LRS整數性條件。

從兩種距離到特徵值：歐氏與球面的上界

arXiv:2509.00858v1 (2025) | 兩頁中文導讀

球面情形：內積和決定矩陣的符號

若單位向量的兩種內積為 $a < b$ ，Gram矩陣 G 半正定、秩至多 d 。取 $S = [2G - (a+b)J + (a+b-2)I] / (b-a)$ ，並令 $\gamma = (2-a-b)/(b-a) > 1$ 。 $a+b \geq 0$ 時，扣除的全1矩陣至多帶來一個負方向； $a+b < 0$ 時則是加上半正定秩1矩陣。這個符號差別導致維度 d 與 $d+1$ 兩種相對界。

兩種球面相對界的正確使用方式

當 $a+b \geq 0$ 且 $\gamma^2 > d$ ，得到 $n \leq d(\gamma^2 - 1)/(\gamma^2 - d)$ 。當 $a+b < 0$ 且 $\gamma^2 > d+1$ ，得到 $n \leq (d+1)(\gamma^2 - 1)/(\gamma^2 - d - 1)$ 。特別是 $a = -\alpha$ 、 $b = \alpha$ 時，第一式回到等角直線相對界 $d(1-\alpha^2)/(1-d\alpha^2)$ 。每個上界都必須保留指定內積、內積和符號及正分母條件，不能只保留最後的數字。

負內積和可向上提升成等角直線

$a+b < 0$ 時， $G' = [2G - (a+b)J] / (2-a-b)$ 半正定，秩至多 $d+1$ ，對角為1，非對角為 $\pm 1/\gamma$ 。因此任何這類球面集合都可提升為 R^{d+1} 的等角直線，沿用其上界。原文Theorem 6.3更宣稱雙向對應，但逆向扣除秩1矩陣後仍需另證半正定及降秩；只選滿足比例的 a 、 b 並不足夠，本導讀不採無條件逆向構造。

取等號把問題連到等角緊框架

Cauchy-Schwarz取等號迫使剩餘特徵值相同，相應Seidel矩陣因而只有兩個特徵值，對應等角緊框架ETF。若固定參數達界所需ETF不存在，就可排除等號。例如來源引用 R^{19} 不存在76向量ETF，排除 $\gamma=5$ 時 R^{18} 歐氏集合的77點，以及 R^{19} 正內積和球面集合的76點。這是必要條件，不是任意ETF都能逆向構造原集合。

成果定位與閱讀版本注意事項

本篇把兩距離上界統整為「低秩Gram資料—Seidel譜—跡不等式—ETF取等號」的鏈條。來源v1有漏列分母條件、個別秩與符號筆誤，以及逆向對應尚需補證等處；導讀已保留可直接核查的矩陣公式與單向推論。來源：Wei-Chun Chen、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2509.00858v1（2025年），24頁。