

糾纏輔助CWS量子碼大小的半正定規劃上界

arXiv:2311.07111v2 (2024) | 兩頁中文導讀

問題與糾纏資源模型

本文把半正定規劃 (SDP) 用於糾纏輔助codeword stabilized量子碼 (EA-CWS)，估計固定長度、距離與糾纏資源下的最大碼空間維度。 $((n,M,d;c))$ 中的 M 是量子子空間維度，不是可用量子態的離散個數；任意基底疊加仍是碼態。Alice的 n 個量子位元通過有雜訊通道，Bob預先持有 c 個假設無雜訊的糾纏夥伴，約化態應為 $I/2^c$ 。錯誤作用為 $E \otimes I$ ，故距離只數Alice端。本文的SDP成果針對EA-CWS類別，不能直接推成任意量子碼的通用排除。

偵測與無害作用必須分清楚

令 P 為碼空間投影，Pauli錯誤 E 可偵測當且僅當 $P(E \otimes I)P = \lambda P$ 。這是壓縮矩陣條件，一般不表示 E 在整個碼空間上乘 λ 。特別是 $PEP=0$ 代表 E 把碼空間送到其正交空間，不是 E 把向量變成零；Pauli是酉算子，會保留範數。以 $Q = \text{span}\{|00\rangle, |11\rangle\}$ 為例， $X \otimes I$ 把 Q 送到 $\text{span}\{|10\rangle, |01\rangle\}$ 而可偵測， $Z \otimes Z$ 在 Q 上為恆等而無害； $Z \otimes I$ 則在邏輯基底上為 $\text{diag}(1, -1)$ ，改變相對相位且不可偵測，所以此教學例子的 $d=1$ 。

CWS結構讓抽象條件可計數

最大穩定子群 S 決定參考態 $|S\rangle$ ，一組互相交換的word operators $W = \{I, \omega_2, \dots, \omega_M\}$ 作用於Alice，使 $(\omega_i \otimes I)|S\rangle$ 成為碼空間的正交基底。 W 不必形成群；形成適當阿貝爾群時才是EA穩定子碼的特殊情形。本文證明EA-CWS的廣義穩定子集合 $S_\lambda = \{E: P(E \otimes I)P = \lambda P\}$ 只有 $\lambda = 0, \pm 1$ 可能非空，因穩定子參考態對Pauli的期望只有這三種值。 $\lambda = \pm 1$ 確實給本徵作用； $\lambda = 0$ 仍須保留正交子空間的解釋。

找一批不可偵測錯誤就能給上界

令 $S_I = \{E: E \otimes I \in S\}$ 為參考態的isotropic subgroup， S_g 為固定整個碼空間的帶符號Pauli群，則 $S_g \subseteq S_I$ 。若 $E = \omega_i \beta$ ， $\beta \in S_I$ 且 ω_i 非恆等， E 會把參考態送到另一個word state，產生非零邏輯非對角矩陣元素，故 $WS_I \setminus S_I$ 中的錯誤都不可偵測。因此 $d \leq \min \text{wt}(WS_I \setminus S_I)$ 。更強的原文Lemma23使用 $WS_I \setminus S_g$ ，但較難建模。子集合的最小重量可能高於真正 d ，所以這個方便的式子是上界，不應自動改寫成等號。

列舉子把量子條件接到有限集合

Shor-Laflamme列舉子 $A_j = M^{-2} \sum |\text{Tr}(EP)|^2$ 與 $B_j = M^{-1} \sum \text{Tr}(EPEP)$ 滿足 $0 \leq A_j \leq B_j$ ，且 $j < d$ 時相等。EA情形以 $A_{i,j}$ 、 $B_{i,j}$ 分別記Alice和Bob重量，距離限制是 $A_{i,0} = B_{i,0}$ 。split MacWilliams與shadow非負性提供LP限制。關鍵的Lemma14把 $B_{i,0}$ 解釋成 WS_I 的平均距離列舉子，總和為 $|WS_I| = M^{2(n-c)}$ ；完整 B 則對應 $(W \otimes I)S$ ，總量為 $M^{2(n+c)}$ 。這兩種重量與正規化不可混用。

糾纏輔助CWS量子碼大小的半正定規劃上界

arXiv:2311.07111v2 (2024) | 兩頁中文導讀

SDP如何使用三點資料

令 $T_1=S_I$ 、 $T_2=WS_I$ ，在忽略整體相位的四字母Pauli空間中，三點關係由 i 、 j 、 t 、 p 描述： i 和 j 是兩條相對字的重量， t 是共同非 I 座標數， p 是其中符號相同的座標數，第三距離為 $i+j-t-p$ 。四類三點分別來自 T_1^3 、 T_2^3 、 $T_1 \times T_2^2$ 、 $T_2 \times T_1^2$ 。集合指示向量外積 $\chi\chi^T$ 必半正定，對對稱群與基點在集合內外取平均，得到8組PSD限制。Terwilliger代數把原本 4^n 階矩陣區塊化； $n=10$ 時最大區塊只有11階，但仍有多個區塊與變數類別。

數值成果應如何讀

固定 n 、 M 、 d 、 c 後，若必要的LP與PSD條件不可行，便可排除對應EA-CWS參數；鬆弛可行則不保證真碼存在。TableII的 $a(b)$ 代表SDP上界 a 、LP上界 b 。例如 $(n,c,d)=(3,2,3)$ 由4降3， $(4,3,4)$ 由8降3， $(10,4,4)$ 由144降140。這些是作者報告的碼維度上界，不是相同大小的構造。對 $c=0$ ，原文沒有觀察到超越包含shadow的完整LP； $((10,9,4;0))$ 雖可由SDP排除，加入shadow後的LP也能排除，不能因此說SDP全面勝出。

交換關係與可核算的6維例子

在 $c=0$ 的CWS碼中，對參考態穩定子的相位類 β ，令 W_c 、 W_a 分別數與 β 交換及反交換的word operators。 A_j 是重量 j 的 $(W_c - W_a)^2/M^2$ 之和，因此一般可能為分數。原文 $((5,6,2;0))$ 例子給 $A=(1,0,0,0,5/3,8/3)$ 。本導讀用精確分數重算MacWilliams變換，得到 $B=(1,0,20,50,75,46)$ ； $A_2=0 < B_2=20$ 確認 $d=2$ 。 $\Sigma A=16/3=32/6$ 、 $\Sigma B=192=6 \cdot 32$ 也符合正規化。此例的shadow向量 $D=(0,30,60,360,420,282)$ 亦以帶符號變換重算相符。

shadow意義與來源中的符號差異

shadow以 $P=Y^\wedge \otimes n$ $PY^\wedge \otimes n$ 及非負量 $\text{Tr}(EPEP)$ 定義；CWS穩定子態的複共軛可由Pauli平移得到，因此可解釋成 WS 與另一個Pauli平移集合之間的距離計數，但仍須核對交疊與正規化。原文§IV把 $PEP=0$ 寫成算子消滅碼態的文字不正確，本導讀採正交空間解釋。另Theorem30把 $T_2=WS_I$ 連到總重量 $\Sigma_{(r+s=i)} B_{r,s}$ ，與Lemma14的 $B_{i,0}$ 及總量不一致；此處依定義清楚區分，沒有宣稱只改一式就重現或驗證完整程式。

貢獻、限制與來源

方法的核心是把不可偵測Pauli錯誤整理成兩個有限集合，以三點幾何與矩陣正性增強量子碼上界，同時解釋 A 與shadow列舉子的組合意義。更強的錯誤子集合、更高點數與可核查的對偶證書仍是研究方向。來源：Ching-Yi Lai、Pin-Chieh Tseng、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds on the size of entanglement-assisted codeword stabilized quantum codes，arXiv:2311.07111v2 (2024)。數值程式為PinChiehTseng/SDP_quantum_code。本導讀重算上述例子，未獨立重跑整張SDP表，也不宣稱其為2026最新紀錄。