

複數球面碼：從相位到半正定限制

arXiv:2204.04108v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：複數內積多出的相位如何處理？

複數單位球面 Ω_d 位於 C^d ，有限點集的內積可以是複數，其共軛也會出現。不同於只看內積絕對值的射影碼，本文保留完整複數內積。若直接改看 $R^d(2d)$ 的實內積，就只保留實部、丟掉相位。作者因此建立直接適用於複數球面碼的三點半正定規劃框架。

從兩點線性規劃走向三點限制

兩點LP限制統計每種內積出現的次數，但無法完整表達三個點共同存在的條件。三點Gram矩陣必須為Hermitian半正定，內積同時受排列與共軛對稱控制。作者以三點分布為變數，加上由酉群調和分析導出的矩陣正性，讓「局部彼此相容」成為比單純兩點計數更強的限制。

複數調和分析提供正定核

實球面常用Gegenbauer多項式，複數球面則按雙次數 (k,l) 分解調和空間。固定一個基準向量後，考慮酉群穩定子的作用；某些不可約成分具有重數，因此自然出現矩陣值核。它們由評值矩陣乘其共軛轉置構成，對有限點集加總必半正定。這是將群對稱轉為SDP限制的來源。

三點分布的正規化與總點數

來源將三點計數除以集合大小，對角型態 $x_{(1,1,1)}=1$ ，並由1加上非對角二點分布恢復點數。可行型態必滿足三點Gram半正定、排列對稱及共軛相容。求使總點數最大的可行分布，便得到上界；如果找到對偶非負證書，可把數值線索轉為可驗證的不等式。

一個可明確證明的複數兩距離結果

對 $d \geq 5$ ，若不同點內積只能為 $(d-1+i)/d$ 及其共軛，來源Theorem 4.3以三次核推出 $|X| < 6$ ，故至多5點。顯式分式為 $(18d^3 - 48d^2 + 24d + 4)/(3d^3 - 6d^2 - 6d + 8)$ ，在此範圍小於6。這是指定兩個複數內積的結果，不能解讀成所有複數兩距離集合都只有5點。

複數球面碼：從相位到半正定限制

arXiv:2204.04108v1 (2022) | 兩頁中文導讀

關聯方案不存在性的應用

某些關聯方案參數若可實現，其特徵空間嵌入會形成帶指定內積的複數球面碼。來源考察889點與945點的兩組候選，分別落在複數維度63與59，利用調和多項式的加總正性導出負值矛盾。這部分實際使用兩點線性規劃就足夠，不能把文中所有不存在性都說成必須靠新三點SDP。

準不偏Hadamard矩陣如何連到球面碼？

若多個Hadamard矩陣兩兩乘積經縮放後是指定權重的秤重矩陣，把各行正規化便得到實球面碼。相異行的內積受到0與 $\pm 1/\sqrt{l}$ 限制，其中 l 由矩陣參數決定。因此矩陣家族的最大個數，可以轉成球面點數上界再除以每個矩陣的行數。這是離散矩陣問題通向幾何最佳化的橋梁。

應用表格需區分解析界與數值界

來源參數(16,4,64)的家族上界由既有35改善至15；另一組(24,4,144)，LP給27，數值SDP得到25。每列改善程度不同，不能一概宣稱全部參數皆大幅提升。數值最佳化值與解析對偶證書也應分開：本導讀把表格中的計算結果按來源報告，不冒稱重新跑完所有SDP或完成精確證書化。

一個低次多項式界的典型形式

對內積限制0、 $\pm \alpha$ ，可取多項式 $F(t)=t^2(t^2-\alpha^2)$ 。來源在 $(d+4)\alpha^2 \leq 6$ 及 $(d+2)\alpha^2 < 3$ 等條件下，取得 $d(d+2)(1-\alpha^2)/(3-(d+2)\alpha^2)$ 形式的點數界。方法重點是展開係數的符號與允許內積上的消失性，不能略去條件後把分式當作任意球面碼的上界。

研究價值與閱讀範圍

本篇建立保留複數相位的半正定工具，同時展示對關聯方案與特殊矩陣的用途。導讀採核的正定來源與可核查結論，不重抄來源顯式核中需另外檢查的相位係數。來源：Kao、Suda、Yu，arXiv:2204.04108v1（2022年），17頁。所有比較與數值狀態均依此版本，不當作截至今日的完整最佳界列表。