

在圖上分享茶：距離界與最優策略

arXiv:2405.15353v2 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：平均竟然也有策略

在圖 G 上，每個頂點放有非負茶量 $w(x)$ 。一次分享選一個有限連通頂點集合 T ，把其中的總茶量平均分給 T ，其餘位置不動。給定起始分布與目標頂點 v ，能把多少茶集中到 v ？平均會減少差異，但操作次序仍可影響目標濃度。本文證明單一來源的精確距離界，並研究多來源上界、有限圖的最佳策略存在性與來源—目標對偶。

主定理與一個必要區分

若一開始只有 r 放有1單位茶，則任何可達狀態都滿足 $w(v) \leq 1/(d(r,v)+1)$ 。一般分享只需選一條 r 到 v 的最短路徑一次平均，即可達界。邊操作只准相鄰兩點平均，雖也受同一上界限制，卻不一定有限次達到。例如三點路徑末端的最佳上確界是 $1/3$ ；從整數初態做有限次兩點平均只會產生分母為2冪的數，因此只能逼近 $1/3$ 。

證明亮點：控制所有集合的茶量

令 $p_r(S) = \prod_{x \in S} d(r,x)/(d(r,x)+1)$ ，作者以 $w(S) \leq 1 - p_r(S)$ 作歸納不變量。初態 δ_r 立刻符合。若平均邊 xy 跨越 S 邊界，平均後 $w(S)$ 恰為舊 $w(S-x)$ 與 $w(S+y)$ 的平均。相鄰距離 a, b 滿足 $a \leq b+1$ ，而 $1+ab/((a+1)(b+1)) - 2a/(a+1) = (b+1-a)/((a+1)(b+1)) \geq 0$ ，剛好使集合上界被保留。取 $S=\{v\}$ 即得主定理。

一般分享與多個目標

一般連通集合平均可用邊平均逼近，因而保留相同上界；附錄A另給直接的加權乘積證明，利用連通集合上的距離標記形成整數區間。集合不變量也控制多目標總量：若兩個目標距離 r 分別為1、2，總茶量不超過 $1 - (1/2)(2/3) = 2/3$ 。不過單點可以最短路徑達界，不代表所有多目標集合的上界都可達。

任意起始分布的距離potential

對目標 v 及來源 x ，定義 $h_x(a) = a + (w(x) - a)/(d(x,v)+1)$ 。選出初始 $w(x) > w(v)$ 的來源，按茶量遞增依序組合 h_x ，從 $w(v)$ 開始，得到任何可達目標茶量的上界。兩個來源的交換差值是 $(w(y) - w(x))/((d_x+1)(d_y+1))$ ，所以由淡到濃最有利。這是一般圖的分析potential，不應直接宣稱每個映射組合都能用實際分享達成。

在圖上分享茶：距離界與最優策略

arXiv:2405.15353v2 (2025) | 兩頁中文導讀

星狀圖展示排序與達界

星狀圖各來源都是目標中心的鄰居，且未使用的葉子保持原值，因此由淡到濃逐片平均確實能達到potential。中心0、葉子1、2、4時，依序得到 $1/2$ 、 $5/4$ 、 $21/8$ ，比全圖一次平均的 $7/4$ 大；反序則只得 $3/2$ 。本文也指出無限星狀圖可能沒有有限最佳策略：中心0、葉子 i 茶量 2^{-i} ，用前 k 片由小到大平均得到 $(1-4^{-k})/3$ ，逼近但不達 $1/3$ ；此公式是導讀補算。

有限圖的可達集是緊緻的

對有限圖，一般分享的可達集 $R(w)$ 不僅有界，也封閉，故任何連續目標函數都能取得最大值。核心是把平均寫成對稱正交投影 A_T ；平方範數下降量等於集合內偏離均值的平方和。無限操作鏈的極限，在反覆操作集合的連通分量內成為均勻分布，可由有限前綴再平均各分量實現。要處理不在同一操作鏈的任意收斂序列，作者另以可達偏序、距離函數與Zorn引理證閉性。

存在性不等於快速求出策略

緊緻性保證最佳值能由有限次一般操作取得，但沒有直接給出通用的短策略或有效率演算法。可達集也不一定凸：兩點圖從 $(1,0)$ 出發，只能到原態或 $(1/2,1/2)$ 。文中樹圖反例顯示，不能一概禁止早期平均集合包含於較晚集合；某些最佳策略必須有這種包含。這些現象提醒我們：局部平均的可達幾何比單純守恆或凸組合直覺更細緻。

對偶性把多來源換成多目標

每個平均矩陣對稱，所以 $\langle c, A_{T_k} \cdots A_{T_1} w \rangle = \langle w, A_{T_1} \cdots A_{T_k} c \rangle$ 。對所有序列取上確界，就得到交換初始分布 w 與目標權重 c 的對偶。從 X 每點放1單位、最大化 v ，等同從 v 放1單位、最大化 X 總茶量。操作次序反轉不是逆操作，因為平均通常不可逆。若准許邊上的部分平均，線性目標上確界不變，因其乘積可展開成普通邊操作序列的凸組合；可達集本身仍可能不同。

國際合作與研究延伸

本文連結圖距離、組合不變量、投影動力學與最優化；後續可探討短最優策略、特殊圖類及多目標達界條件。九位作者為J. Pascal Gollin、Kevin Hendrey、Hao Huang、Tony Huynh、Bojan Mohar、Sang-il Oum、Ningyuan Yang、Wei-Hsuan Yu、Xuding Zhu。致謝提及2024中研院Pacific Rim Graph Theory Group Workshop。導讀依Sharing tea on a graph，arXiv:2405.15353v2（2025年9月），不把來源版本的研究問題當成已核實的最新狀態。

多項式何時容得下一整片乘積？

arXiv:2605.22320v1 (2026) | 兩頁中文導讀

研究問題：代數結構如何控制離散交點？

給多項式 $F(x,y,z,t)$ ，考慮它的零集合與 $P \times Q$ 相交多少次，其中 P 、 Q 各是 C^2 中的有限點集。若零集合包含兩條曲線的完整乘積，就能任取曲線上的 n 個點而得到 n^2 個交點。本文研究允許這種乘積結構的Cartesian多項式，以及通常不具此結構的non-Cartesian多項式，連結代數幾何、計算代數與組合幾何。

定義：Cartesian不是普通的變數可分離

F 為Cartesian，是指 $F=G(x,y)H_1(x,y,z,t)+K(z,t)H_2(x,y,z,t)$ ，其中 G 、 K 都非常數。等價地， F 屬於分別由兩組變數生成的理想 (G,K) 。例如 $F=x+z$ 屬於 (x,z) ，所以為Cartesian。定義取決於如何把變數分組；不能只因 F 同時含 x 與 z ，或有乘積項，就判定它是否Cartesian。

主要結論：一般位置下不具這種結構

來源證明對固定 $d \geq 2$ ， $C^2 \times C^2$ 上次數至多 d 的Zariski一般多項式為non-Cartesian。「一般」指避開某個真代數閉子集，不是對每一個係數選擇都成立，也不是對某個有限隨機生成器給出確切成功率。這說明完整曲線乘積的存在，是需要特殊代數關係的退化現象。

可檢查的充分條件來自纖維

固定 (z,t) ，得到兩變數纖維 $F_{(z,t)}(x,y)$ 。來源Theorem 3.1要求： F 不可約且非僅含 z,t ；只有有限多個可約纖維；每個纖維與其他纖維成比例的參數也只有有限多個。若存在Cartesian分解，在 $K=0$ 這條曲線上，幾乎所有不可約纖維都必為同一 G 的倍數，產生無限多個成比例纖維，與條件矛盾。

為何三次以上可用維度計數？

$d \geq 3$ 時，兩變數次數至多 d 的可約多項式在係數空間中有至少2的餘維。參數 (z,t) 只有2維，評估映射的纖維維度分析便使一般 F 的可約纖維只剩有限個。再比較最高次與次高次係數，可以用可逆 2×2 矩陣分辨 (z,t) ，排除不同參數給成比例纖維。這把「例外很少」轉成精確的代數維度論證。

多項式何時容得下一整片乘積？

arXiv:2605.22320v1 (2026) | 兩頁中文導讀

二次情形必須另外處理

一般二次 F 反而會有無限多個可約纖維，因此不能套用前段充分條件。來源改化成 $F=(x-z)^2+(y-t)^2+R(z,t)$ ， R 非零且次數至多2，證明Cartesian性等價於 R 可被 $z+it-c$ 或 $z-it-c$ 整除， c 為常數。一般 R 不含這類特殊線性因子，於是二次也得到non-Cartesian性。此處在複數域，不能把平方和當成實數非負量。

演算法：把存在分解轉成係數方程

作者利用有效Hilbert零點定理，加入新變數 u ，尋找 $q(1-uF)+q_1G+q_2K=1$ 的有界次數證書，再以係數比較及Gröbner基處理有限多項式系統。來源給乘積次數界 $\max\{(d+1)d^2, 27\}$ ，二次可改24。這提供可判定性的路線，不代表高次、多變數時運算一定快速。逆向理由應取 $G=K=0$ 且 $F \neq 0$ 時 $u=1/F$ 導出矛盾。

交點界與可精確數出的達階例子

在 $C^2 \times C^2$ ，既有non-Cartesian交點界為 $O_d(|P|^{2/3}|Q|^{2/3}+|P|+|Q|)$ 。本文給 $F=x^2+y^2+1-2ax-2by$ ：取 $Q=\{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, 2s^2\}$ 及 s^3 條 $b=ma+t$ 的直線，每條恰穿過 Q 中 s 點。為每條線解 $(m^2+1)y^2-2ty+1=0$ 並令 $x=-my$ ，得到 $|P|=s^3$ 、 $|Q|=2s^3$ 、交點數 s^4 ，達到平衡情況的 $n^{4/3}$ 量級。

高維不能照搬：非Cartesian仍可能有 n^2 交點

來源考察 $C^3 \times C^3$ 上的 $F=z-ax-by-c$ 。令 $P=\{(i,0,0)\}$ 、 $Q=\{(0,j,0)\}$ ，則任意一對都使 $F=0$ ，交點恰為 n^2 。高維的超曲面乘積條件，並未排除低維曲線乘積，所以仍需額外纖維或一般位置假設。作者另研究高維一般多項式：各塊維度至少2時，最大塊維度 $\geq$ 塊數，或 $d \geq \max\{2k-3, 7\}$ ，可得到一般非Cartesian性。

研究意義與版本中仍應核對之處

本文把退化結構的稀有性、代數判定與可達交點例子放在同一框架。Cartesian多項式族甚至不閉：若 F 非Cartesian， $(1+x/n)F$ 卻皆Cartesian並收斂到 F 。導讀保留交點界的加法項，避免在點數不平衡時誤用；來源高維Theorem 4.3的展示式未列對應項，完整適用條件仍宜核對。來源：Shen、Truong、Yu，arXiv:2605.22320v1（2026年）。

重量9的互不偏秤重矩陣：構造與最優性

arXiv:2501.15444v2 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要結果

秤重矩陣 $W(n,k)$ 的元素為0、1、-1，且 $WW^T=kl$ 。兩個同階同重量矩陣不偏，是指 $W_1W_2^T/\sqrt{k}$ 仍是 $W(n,k)$ 。本文聚焦重量9，固定階數 n 求互不偏家族的最大大小 f 。作者證明13是首次出現不偏配對的階數，並確定13、15、16階的最大家族分別為3、7、15。16階新找到的15個矩陣達到既有上界，是本篇最醒目的構造與最優性成果。

不偏矩陣與球面幾何

重量9矩陣每列有9個非零元素，不同列正交；兩個不偏矩陣的列內積只能0或 ± 3 。除以3後，每個矩陣的列成為 R^n 的一組正交基底，再加入標準基底，共得到 $n(f+1)$ 個單位向量，非對角內積為0、 $\pm 1/3$ 。這是球面三距離集合，但不是不同基底間所有絕對內積皆相同的一般MUB，因為零內積也被允許。球面點數上界可轉換為矩陣家族上界。

拉丁方把小矩陣擴大

取種子 $W(n,k)$ 各欄 w_i ，令 $C_i=w_iw_i^T$ 。欄正交性給 $C_iC_j=0$ 、 $C_i^2=kC_i$ 及 $\sum C_i=kl$ 。若拉丁方邊長 $t \geq n$ ，可補零區塊到 t 個符號，再以 $C_{(L(i,j))}$ 組成 nt 階、重量 k^2 的矩陣。兩個suitable拉丁方的任意兩列恰重合一次，使跨矩陣乘積每個區塊只有 kC_a ，除以 k 即合法。 f 個suitable方因此給 f 個互不偏矩陣； $t=n$ 時還能額外加入一個。

重量9的無窮族與可重現例子

由 $W(4,3)$ 種子及質數冪 q 階拉丁方，得到 $q-1$ 個 $W(4q,9)$ ， $q \geq 4$ 。 $q=5$ 時可用 F_5 上的 $L_a(i,j)=i+aj$ ， $a=1,2,3,4$ ；不同 a 的任意兩列相等條件是一元一次方程，恰有一解。本導讀已據此構造四個20階矩陣，精確驗證各矩陣 $WW^T=9l$ 及所有跨矩陣內積。這條無窮族構造與16階15個最優家族的搜尋是不同來源。

三元碼限制候選列，仍須實數檢查

因 $WW^T=9l$ 模3為零，矩陣列生成自正交三元碼 $C_3(W)$ 。若 W_2 與 W_1 不偏， W_2 每列皆在 $C_3(W_1)$ 的對偶碼內。搜尋先取重量9碼字，把 F_3 符號2還原成整數-1，再固定第一個非零元素為1，去掉換號重複。對偶碼條件僅保證內積被3整除，還可能出現 ± 6 或 ± 9 ，所以必須另檢查與 W_1 每列的整數內積只在0、 ± 3 。

重量9的互不偏秤重矩陣：構造與最優性

arXiv:2501.15444v2 (2025) | 兩頁中文導讀

兩層clique把候選組成家族

第一層圖以合法候選列為頂點，整數內積為零時相鄰； n -clique提供 n 個正交列，得到一個不偏伙伴 W_2 。第二層圖以 W_1 的伙伴矩陣為頂點，彼此不偏時相鄰； $(f-1)$ -clique加上固定 W_1 便是 f 個家族。對13、15階，作者結合既有矩陣分類與clique計算確定最大值。完整不存在性需要涵蓋所有必要代表與候選，不能由搜尋暫時失敗直接推論。

上界如何證明16階最優

球面LP給 $f \leq (n-1)(n+4)/6$ ，且 $n < 25$ 時另有 $f \leq 9(n-1)/(25-n)$ 。代 $n=16$ 得到 $f \leq 15$ ；附錄提供15個構造，所以最大值恰15，不必枚舉全部最優家族。本導讀已擷取Tables 7–8的240列，驗算15個矩陣及全部105對跨矩陣乘積。較高階則利用三點SDP，來源以MATLAB/CVX、參數5求解，24階報告上界由107降至96；此處未另提供精確SDP對偶證書。

最優矩陣產生圖、設計與協會方案

16階15個矩陣加上標準基底，得到256點 Y ；以正交為鄰接產生強正則圖(256,120,56,56)。再加入反點得到512點 $X=Y \cup (-Y)$ ，是一個球面5-design。本導讀以整數座標驗證鄰接矩陣 $A^2=64I+56J$ ，以及二次、四次球面矩，奇數矩則由反點對稱消失。距離關係給4-class Q-polynomial協會方案，利用基底分組細分後得到5-class方案。

已確定與尚未確定的範圍

10、12、14階存在秤重矩陣但沒有不偏配對，不能說這些階完全不存在矩陣。13、15、16階最大值為3、7、15；17到24階仍只有上下界，例如17階5–18、20階4–34、23階9–99、24階6–96。這些是2025來源版本的範圍。作者另找到四個本質不同的16階15矩陣家族，其5-class協會方案互不同構；這是四個例子，不是所有最優家族的完整分類。

研究意義與可延伸方向

本篇把拉丁方構造、有限域碼、clique搜尋與球面LP/SDP串成完整方法，並展示達界構型能產生豐富代數組合結構。下一步可研究重量25的 F_5 碼搜尋、改進未定階數的上下界，或辨別最優家族的等價性；模 p 方法仍需保留整數內積篩選。來源：Makoto Araya、Masaaki Harada、Hadi Kharaghani、Sho Suda、Wei-Hsuan Yu，Unbiased weighing matrices of weight 9，arXiv:2501.15444v2 (2025)，Designs, Codes and Cryptography。

從兩種距離到特徵值：歐氏與球面的上界

arXiv:2509.00858v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：知道距離比例後，能否壓低點數？

兩距離集合要求不同點間的距離只有兩種。若不固定距離，歐氏 R^d 的通用上界為 $C(d+2, 2)$ ，單純形邊中點則提供 $C(d+1, 2)$ 的下界。本文考慮更細的問題：距離比已指定時，能否用矩陣特徵值限制集合大小？作者同時處理不必共球的歐氏集合，以及單位球面上的兩內積集合。

Seidel矩陣把兩種關係寫成正負號

Seidel矩陣是實對稱矩陣，對角為0，非對角為 ± 1 。因此 r 階Seidel矩陣必有 $\text{tr}(S)=0$ 、 $\text{tr}(S^2)=r(r-1)$ 。這兩個跡恆等式把特徵值的總和與平方和固定下來；如果幾何再迫使某個特徵值具有大重數，留給其他特徵值的空間便受到限制。它是本文把組合資料轉成上界的核心工具。

歐氏集合：先移動一個基準點到原點

對 n 個點 $P_1, \dots, P_n$ ，取 $M_{ij} = \|P_i - P_n\|^2 + \|P_j - P_n\|^2 - \|P_i - P_j\|^2$ 。這是平移後向量Gram矩陣的兩倍，所以 M 半正定且秩至多 d 。將距離縮放為1、 δ 且 $\delta > 1$ ，依到基準點的距離分成兩群，加入秩至多2的區塊常數矩陣 D ，再平移及縮放得到 $n-1$ 階Seidel矩陣。

譜限制導出的歐氏相對界

令 $\gamma = (1 + \delta^2) / (\delta^2 - 1)$ 。原文利用Weyl不等式與Cauchy-Schwarz得到 $(\gamma^2 - d - 1)(n - 1) \leq (d + 1)(\gamma^2 - 1)$ 。只有 $\gamma^2 > d + 1$ 時，才能除以正分母，得到 $n \leq 1 + (d + 1)(\gamma^2 - 1) / (\gamma^2 - d - 1)$ 。原文摘要未寫出這項必要條件，本導讀明列；若分母不為正，該分式不能當作點數上界。

固定參數的實例與整數條件

例如 $d=15$ 、 $\gamma=5$ ，也就是 $\delta^2=3/2$ ，上式給 $n \leq 1 + 16 \times 24 / 9$ ，取整數得 $n \leq 43$ 。這是固定距離比的結論，不是所有 R^{15} 兩距離集合只有43點。大量重複特徵值配合整數矩陣的代數共軛，可迫使 γ 為奇整數；本文展示的門檻較經典Neumaier門檻弱，因此不能宣稱改善了已知最佳LRS整數性條件。

從兩種距離到特徵值：歐氏與球面的上界

arXiv:2509.00858v1 (2025) | 兩頁中文導讀

球面情形：內積和決定矩陣的符號

若單位向量的兩種內積為 $a < b$ ，Gram矩陣 G 半正定、秩至多 d 。取 $S = [2G - (a+b)J + (a+b-2)I]/(b-a)$ ，並令 $\gamma = (2-a-b)/(b-a) > 1$ 。 $a+b \geq 0$ 時，扣除的全1矩陣至多帶來一個負方向； $a+b < 0$ 時則是加上半正定秩1矩陣。這個符號差別導致維度 d 與 $d+1$ 兩種相對界。

兩種球面相對界的正確使用方式

當 $a+b \geq 0$ 且 $\gamma^2 > d$ ，得到 $n \leq d(\gamma^2 - 1)/(\gamma^2 - d)$ 。當 $a+b < 0$ 且 $\gamma^2 > d+1$ ，得到 $n \leq (d+1)(\gamma^2 - 1)/(\gamma^2 - d - 1)$ 。特別是 $a = -\alpha$ 、 $b = \alpha$ 時，第一式回到等角直線相對界 $d(1-\alpha^2)/(1-d\alpha^2)$ 。每個上界都必須保留指定內積、內積和符號及正分母條件，不能只保留最後的數字。

負內積和可向上提升成等角直線

$a+b < 0$ 時， $G' = [2G - (a+b)J]/(2-a-b)$ 半正定，秩至多 $d+1$ ，對角為1，非對角為 $\pm 1/\gamma$ 。因此任何這類球面集合都可提升為 R^{d+1} 的等角直線，沿用其上界。原文Theorem 6.3更宣稱雙向對應，但逆向扣除秩1矩陣後仍需另證半正定及降秩；只選滿足比例的 a 、 b 並不足夠，本導讀不採無條件逆向構造。

取等號把問題連到等角緊框架

Cauchy-Schwarz取等號迫使剩餘特徵值相同，相應Seidel矩陣因而只有兩個特徵值，對應等角緊框架ETF。若固定參數達界所需ETF不存在，就可排除等號。例如來源引用 R^{19} 不存在76向量ETF，排除 $\gamma=5$ 時 R^{18} 歐氏集合的77點，以及 R^{19} 正內積和球面集合的76點。這是必要條件，不是任意ETF都能逆向構造原集合。

成果定位與閱讀版本注意事項

本篇把兩距離上界統整為「低秩Gram資料—Seidel譜—跡不等式—ETF取等號」的鏈條。來源v1有漏列分母條件、個別秩與符號筆誤，以及逆向對應尚需補證等處；導讀已保留可直接核查的矩陣公式與單向推論。來源：Wei-Chun Chen、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2509.00858v1（2025年），24頁。

三角格點上的少距離集合：從最大團到六角形

arXiv:2509.00880v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：只用少數距離，能放多少點？

平面上的有限點集，若不同點之間出現的距離種類不超過 m ，就是本文搜尋的對象。作者把問題限制在三角格點，結合最大團演算法與六角形構造，提出 $m=7$ 至34的一系列大型例子。這些結果提供平面問題的下界；在限制搜尋中找到最優解，不等於證明所有平面構型的最大點數。

格點座標讓距離可以精確檢查

用基底 $(1,0)$ 與 $(1/2, \sqrt{3}/2)$ 表示格點，整數座標差 (a,b) 的距離平方就是 a^2+ab+b^2 。前幾種非零值是1、3、4、7、9、12、13。這讓距離比較化為整數運算，避開浮點平方根誤差。三角格點的高度對稱也讓旋轉、反射及平移等價的候選容易辨認。

第一條路：把幾何問題轉成最大團

固定允許距離集合 S 及一對單位距離基準點，先列出到兩基準點的距離都屬於 S 的候選格點。候選點彼此距離在 S 內才連邊。任一團加上兩基準點，都是合法少距離集合；最大團給這個固定 S 及基準對之下的最佳點數。它不能排除使用不同距離集合或不包含此基準距離的更好構造。

前 m 個最短距離是起點，卻未必最好

作者先採用格點中最短的 m 種距離。所得例子包含 $m=7$ 的16點、 $m=8$ 的19點、 $m=10$ 的24點，以及 $m=15$ 的37點。部分相鄰 m 給相同點數，例如11與12均為27，15與16均為37。因此總表採「至多 m 種距離」的意義；不可把每個表格項都稱為恰好 m 距離的構型。

第二條路：從六角形保留更多點

取正六角形內及邊界的全部三角格點，或取邊長交替為 k 、 $k+1$ 的等角六角形，再視需要刪去角落或直徑端點，降低距離種類。正六角形邊長2、3、4、5分別給19、37、61、91點，距離種類為8、15、23、34。交替邊長 $1/2$ 、 $2/3$ 、 $3/4$ 、 $4/5$ 則給12、27、48、75點，距離種類為5、11、19、28。

三角格點上的少距離集合：從最大團到六角形

arXiv:2509.00880v1 (2025) | 兩頁中文導讀

關鍵例子：19種距離放進48點

在固定最短19種距離的搜尋中，來源得到45點；邊長交替3、4的六角形則有48點。它捨棄距離 $\sqrt{48}$ ，改用稍長的7，總距離種類仍是19。這說明「距離都挑最短」會漏掉好構造。導讀重新列出48個整數座標，逐一計算1128個無序點對，確認點數、距離種類與原文重數陣列一致。

距離重數解釋為何交換有效

某種距離的重數，是實現該距離的無序點對數。最短19距離的45點例子中，最長距離 $\sqrt{48}$ 只出現一次；48點六角形最長距離7出現三次。低重數距離可能消耗一個距離名額卻貢獻很少，改換距離集合便可能容納更多點。這是引導搜尋的觀察，不是任意換掉低重數距離都能增點的定理。

表格結果與來源中的數字校正

兩條路互補：六角形在 $m=19、23、28、29、34$ 得到48、61、75、75、91點。原文Property 4.1.2有一處把邊長4正六角形寫成63點，但總表為61；按整數座標直接重算亦為61，因此本導讀採61。這裡的提升是對文中另一搜尋方案的比較，不表示已逐一核對所有後續文獻的世界紀錄。

未解問題：下界距離全域最優還多遠？

Erdős–Fishburn的相關猜想預期，對足夠大的 m ，平面最大 m 距離構型與三角格點密切相關；本文並未證明猜想，也未證明 $m=7$ 的16點或 $m=8$ 的19點就是全域最佳。原文另猜測大型最優構造不會有重數至多2的距離。它可作為搜尋啟發，但不能用來刪除候選後宣稱搜尋已完備。

研究價值：計算找規律，幾何突破限制

最大團提供可執行的離散模型，對稱六角形提供超出最初距離選擇的構造，兩者的比較揭示距離重數的重要性。後續可保存完整座標證書、擴大距離候選、分析群作用以加速搜尋，並尋找配套上界。來源：Li-Ren Bao、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2509.00880v1（2025年），19頁；程式連結見論文。

三層球面設計：minimal type、ETF與不存在性

arXiv:2508.18685v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：均勻球面點集能否切成三層？

球面5-design是一組有限單位向量，其對所有次數至多5的多項式平均，等於整個球面的平均。本文研究是否存在非零向量 α ，使每個點 x 的投影 $\langle \alpha, x \rangle$ 只取0、 ± 1 ；這稱為minimal type。非零條件不可省略，否則 $\alpha=0$ 會使所有集合平凡符合。這個幾何切層性質帶出強烈的組合限制。

minimal type與tight是不同條件

tight spherical 5-design指達到點數下界 $|D|=d(d+1)$ ，minimal type則指上述三層投影。本文先研究同時具兩者的集合，再研究較廣的反足四距離5-design。不能把minimal type直接翻成點數最少，也不能把任意5-design當作tight。許多結構與ETF結論都需要tight條件。

二階與四階矩決定投影方向長度

令 $N=|D|$ 。因投影只能是0、 ± 1 ，其平方與四次方的離散平均相同。將它們分別與球面的二階、四階矩比較，得到 $\|\alpha\|^2=(d+2)/3$ 。非零投影點共有 $N(d+2)/(3d)$ ，零投影點共有 $2N(d-1)/(3d)$ 。這些數必為整數，所以僅靠矩條件就能排除部分候選。

tight情況的三層大小與設計性

若 $N=d(d+1)$ ，正負兩側各有 $(d+1)(d+2)/6$ 點，赤道有 $2(d-1)(d+1)/3$ 點。把每一層平移到其所在超平面中心再正規化，得到較低維的設計；正負兩層互為反足，赤道本身亦反足。對 $d>7$ 的tight情況，來源將三層間的關係整理成特定Q-polynomial coherent configuration。

組合結構使切層與存在性互相對照

來源Theorem 3.1證明，tight minimal-type 5-design與指定相干配置結構等價，其型態矩陣為 $[3, 2, 3; 2, 4, 2; 3, 2, 3]$ 。各層內與層間只有少數內積，交數及特徵矩陣又須相容。這把原本尋找幾何投影方向的問題，轉成有嚴格參數的代數組合結構問題。

三層球面設計：minimal type、ETF與不存在性

arXiv:2508.18685v1 (2025) | 兩頁中文導讀

從赤道的一半得到等角緊框架

在tight且minimal type的條件下，赤道內積為 -1 及 $\pm 1/\sqrt{d+2}$ 。每對反足點選一個方向，便得到 R^{d-1} 中 $(d-1)(d+1)/3$ 條等角直線，並具有tight frame性質。因此能從指定最大ETF的額外切層結構產生新ETF；結論不是任意最大ETF都可如此派生，minimal type正是關鍵附加條件。

d=23顯示熟悉構造之間的連結

d=23時，tight 5-design有552點；兩側各100點，赤道352點。赤道一半給 R^{22} 中的176向量ETF，側層關聯到參數(100,22,0,6)的強正則圖。這些數字同時滿足矩、反足與組合參數。低維tight 5-design並非全部minimal type，例如d=3就被層大小的整數性排除。

格與算術條件導出無窮多不存在性

來源對 $d=(2m+1)^2-2$ 給出一組算術條件： m 為奇數、 m 不與1模3同餘、 $m(m+1)$ 不被任何奇質數平方整除，且 $m+1$ 不與0模8同餘。條件成立時，不存在minimal-type tight 5-design，包含 $d=119$ 、527。論證把切層方向放入對偶格，利用其範數應為整數與計算值矛盾；它不排除同維度所有tight 5-design。

更廣設計的必要條件與七階障礙

對反足四距離5-design，作者利用導出層的價數與整數性建立必要條件；通過條件並不保證可構造。另以二、四、六階矩證明， $d>1$ 的tight 7-design不可能是minimal type。故E8的240點及d=23的4600點tight 7-design不具此性質，即使它們本身也是高品質的球面均勻配置。

成果定位與來源校核

本篇把矩恆等式、相干配置、ETF與格論結合，說明均勻點集的特定切層具有哪些額外結構。來源Example 4.1部分列舉與Table 2、tight 7-design定理不一致，本導讀按明確定理及層數檢查敘述，避免沿用矛盾例子。來源：Sho Suda、Zili Xu、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2508.18685v1（2025年8月）。

等距碼的剛性：從正單純形到向日葵

arXiv:2504.07036v1 (2025) | 兩頁中文導讀

研究問題：每一對碼字都相隔同樣遠

q 元Hamming空間由長度 n 、每位置 q 種符號的字串組成，距離是不同位置數。等距碼要求任兩個不同碼字距離恰為 d ，而不只是最小距離至少 d 。本文一方面研究Delsarte上界何時可能取等號，另一方面利用集合系統的結構，把長度夠大、距離固定時的上界顯著壓低。

經典上界與特殊的達界距離

Delsarte上界為 $|C| \leq n(q-1)+1$ 。作者證明若達到 $n(q-1)+1$ 個碼字，其共同距離必為 $d = \lceil n(q-1)+1 \rceil / q$ 。換言之，除這個特殊距離外，上界可減為 $n(q-1)$ 。必須使用這個分子含 $+1$ 的式子；本文導讀按主要定理與證明處理來源介紹段落中不一致的寫法。

把每種符號嵌入一個正單純形

將 q 種符號映成 $\mathbb{R}^{q-1}$ 的 q 個單位向量，不同向量內積為 $-1/(q-1)$ 。串接 n 個位置並除以 $\sqrt{n}$ ，便把碼字映入 $\mathbb{R}^{n(q-1)}$ 的單位球面。Hamming距離 d 對應共同內積 $\lambda = 1 - qd/[n(q-1)]$ 。離散字串問題因此化為具有單一非對角內積的Gram矩陣問題。

Gram矩陣的秩迫使例外參數

若 $m = |C|$ ，Gram矩陣為 $(1-\lambda)I + \lambda J$ 。其特徵值為 $1-\lambda$ （重數 $m-1$ ）及 $1+(m-1)\lambda$ 。當 $m = n(q-1)+1$ 時，嵌入維度只有 $m-1$ ，故最後一個特徵值必為0，解出特殊距離。這是一個短而透明的線性代數證明，不需要逐一分類所有 q 元碼字。

有限域單純形碼說明特殊情況真的存在

q 為質數冪時，經典單純形碼給 $n = (q^k - 1)/(q - 1)$ 、 $m = q^k$ 、 $d = q^{k-1}$ ，恰符合達界條件。例如 $q=3$ 、 $k=2$ 時，長度4有9個碼字，共同距離3。這個例子顯示特殊距離不能一概刪除；它也說明達界構造依賴參數，不是任意 q 、 n 都自動存在。

等距碼的剛性：從正單純形到向日葵

arXiv:2504.07036v1 (2025) | 兩頁中文導讀

第二條工具：等交集系統與向日葵

把碼字先視為定重的 q 元集合；若任意兩個集合交集大小固定，足夠大的家族可能被迫形成向日葵：所有成員共用同一核心，核心以外的花瓣兩兩不交。作者將 q 元符號轉成二元區塊，以Deza–Frankl類結構定理辨認這種剛性，再把二元核心拉回原來的 q 元系統。

符號轉換必須保留距離與交集

來源用一個 q 位元區塊表示每個符號：零符號映為零，其他符號映成兩個1的向量，共用其中一個位置。這使非零符號的權重固定，兩兩距離按規律放大。大於 $q-1$ 的家族排除某些只有單一位置的假核心，從而確保所得向日葵確實對應原 q 元碼，而不是編碼方法額外製造的現象。

新的統一上界與大長度門檻

作者得到 $|C| \leq \max\{d^2+d+2, q, \text{floor}(2n/d)\}$ 。因此若 $n \geq \max\{d(d^2+d+2)/2, dq/2\}$ ，便有 $|C| \leq \text{floor}(2n/d)$ 。這與經典約 $n(q-1)$ 的上界相比，在固定 d 且 n 大的情況改善顯著。前面的常數項與門檻是結構定理的必要適用條件，不應把 $2n/d$ 當成所有短碼的普遍上界。

達界構造要明確限定偶數距離

d 為偶數時，把座標分成互不相交、各 $d/2$ 個位置的區塊，每個碼字在一塊放1，其餘放0，可得 $\text{floor}(2n/d)$ 個兩兩距離 d 的碼字。奇數 d 沒有整數大小的 $d/2$ 花瓣，不能照搬此達界敘述。來源部分概括文字未突顯此限制，本導讀將上界與偶數 d 的緊性分開，避免宣稱奇數距離也有同樣線性達界家族。

成果意義：兩種剛性服務不同尺度

Gram秩揭示接近Delsarte極值時的幾何剛性；向日葵揭示固定距離、長度很大時的組合剛性。兩條路各有適用區間，結合後得到更完整的等距碼圖像。後續可研究門檻是否能降低，以及特殊參數的達界分類。來源：Hu、Huang、Yu，arXiv:2504.07036v1（2025年4月），10頁。

相干配置的二距離嵌入與Lisoněk唯一性

arXiv:2211.02331v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題與主定理的範圍

在 R^d 中，二距離集合的不同點對只有兩種歐氏距離，一般上界為 $C(d+2,2)$ 。Lisoněk於1997年構造八維45點達界例：9點形成正單形，36點來自Johnson圖 $J(9,2)$ 的球面嵌入，兩組位於不同半徑的同心球面。本文問：具有同樣相干配置型別 $(2,2;3)$ 與指定嵌入結構的例子，在其他維度是否存在？主定理1.3證明只有Lisoněk例子，且完全不預設點數最大。這不是所有八維45點二距離集合的完整分類。

45點可以用座標直接檢查

在 R^9 中令 $X_1 = \{-e_i + (1/3)1_9\}$ ， $X_2 = \{e_i + e_j : i < j\}$ 。兩組座標和皆為2，實際仿射維度為8。 X_1 內平方距離為2； X_2 內為4減去兩倍區塊交集大小；跨組時，點屬於二元區塊得到4，不屬於得到2。因此實際距離只有 $\sqrt{2}$ 與2。共同中心為 $c = (2/9)1_9$ ，兩組半徑平方依序為 $8/9$ 、 $14/9$ ；第二組相對 R^9 原點的範數 $\sqrt{2}$ ，不能誤作相對共同中心的半徑。

相干配置與準對稱設計的橋樑

型別 $(2,2;3)$ 包含點集合 V 與區塊集合 B ：點對分相同、不同兩類；區塊對分相同、交集 α 、交集 β 三類；兩個方向的點—區塊入射關係各分兩類，共九個關係。相干性要求交叉計數只依關係類別而定。這與準對稱 $2-(m,S,\Lambda)$ 設計密切對應： m 個點，每區塊 S 點，每對點在 Λ 個區塊內，區塊交集只有 $\alpha > \beta$ 兩種。區塊圖以交集 α 為鄰接，是強正則圖。

共同嵌入存在，兩距離卻非常特殊

定理1.2利用九維鄰接代數的矩陣單位組成秩 $m-1$ 的正交投影，把點與區塊同時放入 R^{m-1} 。點部分為正單形，區塊部分為縮放的強正則圖球面嵌入，跨組距離由是否入射決定。但一般仍有 $1+2+2$ 種距離型別，未必只有兩個數值。調整區塊球面半徑，使五種型別合併為兩種，才是主定理要分類的特殊情形。

幾何方程如何引出整數變數

把正單形邊長正規化為 $\sqrt{2}$ ，由距離重合消去區塊半徑，得到三個多項式方程 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 。其中 p_1 可整理為 $[x(m+1) - S(S+1)]^2 = 4S^2(S-x)$ ， x, y 依另一平方距離大於或小於2，取 α, β 或交換。令 $z = [x(m+1) - S(S+1)] / (2S)$ ，則 z 為有理數且 $z^2 = S-x$ 為整數，因此 z 本身為整數。進而 $S = x + z^2$ ， $m = (x + z^2 + z)^2 / x$ ，把問題降到主要兩個變數。

相干配置的二距離嵌入與Lisoněk唯一性

arXiv:2211.02331v1 (2022) | 兩頁中文導讀

輔助方程排除無窮多參數

設計參數必須符合整數性，例如每點區塊數 $T=(m-1)\wedge/(S-1)$ 、區塊總數 $n=mT/S$ 。作者把這些參數、圖參數與交叉數組成整數輔助式 g ，並在不同實數區域證明 $0<g<1$ ，從而排除整個區域。第一分支 $y=x-z$ 中，令 $t=z(z+1)/2$ ，幾乎所有 x 偏離 t 的範圍都被排除；邊界 $x=t-1$ 另外用 $0<g<2$ 逼出 $g=1$ ，解得非整數 z 。這比單純有限範圍枚舉更強。

候選族與電腦輔助部分

第二個 y 分支需另選輔助式，限制 g 只取有限整數值，再與 $p_3=0$ 聯立；來源包含電腦輔助實代數排除，本導讀未獨立重跑全部分類。定理4.4最終保留的非退化候選為 $x=z(z+1)/2$ 、 $y=z(z-1)/2$ 、 $S=z(3z+1)/2$ 、 $m=9z(z+1)/2$ ；另外兩類違反區塊大小小於點數等條件。候選整數參數仍不等於真正設計存在，還需最後一層組合限制。

tight 4-design分類完成最後排除

候選族會迫使區塊數 $n=C(m,2)$ 。在 $4\leq S\leq m-4$ 時，準對稱設計因此成為tight 4-design；Enomoto-Ito-Noda的既有分類只留下4-(23,7,1)及補設計。但候選公式的 $m=9z(z+1)/2$ 一定是9的倍數，不可能等於23。邊界 $S=3$ ，以及 $S=m-1, m-2, m-3$ ，對應二次式的判別式均非平方；唯一剩下 $S=2$ 、 $z=1$ ，恢復 $m=9$ 、 $\alpha=1$ 、 $\beta=0$ 與36區塊。

成果的數學意義與驗算層次

這篇工作的特色，是未假設極大點數，卻由距離方程與整數性導出達界區塊數，再接上設計分類。幾何、非交換鄰接代數、丟番圖方程與組合分類在同一證明中合作。本資源另以3倍整數座標精確枚舉45點的990個點對：平方距離18有540對、36有450對，除以9使得原構型平方距離2、4。這驗證構造，並不替代作者對所有參數的唯一性證明。

可延伸方向與來源

後續可問：保留正單形與強正則圖自然嵌入、但移除相干性時，是否有其他例子？型別(3,2;3)或三距離型別(2,2;4)能否使用類似整數輔助式？極值點數能否反過來迫使相干結構？這些是研究方向，不是本文定理。來源：Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Chin-Yen Lee、Ziqing Xiang、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2211.02331v1 (2022)；期刊Discrete Mathematics 348(4),114378 (2025)。本文依預印本詳述證明。

Clifford群特徵標表與量子表示分解

arXiv:2309.14850v2 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題：如何分解龐大的張量表示

Clifford群是量子資訊的重要有限對稱群。本文研究去掉全域相位後的 n 量子位元Clifford群 C_n ，以生成關係及GAP計算 C_1 、 C_2 、 C_3 的完整特徵標表，再分解矩陣共軛表示的高次張量冪。對 $d=2^n$ ，矩陣空間 $M_d = \text{End}(C^d)$ 維度為 4^n ， m 份張量積更達 $4^{(nm)}$ 維。特徵標方法不直接尋找巨大矩陣的不變子空間，而以每個共軛類的一個數值描述分解重數。

群的定義與生成關係

Pauli算子 I 、 X 、 Y 、 Z 的 n 份張量積，去掉純量相位後構成 P_n 同構 $F_2^{(2n)}$ ，階為 4^n 。Clifford群由保留Pauli算子共軛結構的西算子構成，亦去掉全域相位。它由局部Hadamard、phase閘與相鄰controlled- Z 閘生成；不能只取局部閘的純張量，否則會漏掉糾纏操作。作者採用由Selinger結果改寫的生成關係，先轉為置換群，再用GAP計算。三量子位元的群階已達92,897,280。

從特徵標表讀出不可約重數

特徵標 $\chi_V(g) = \text{Tr}_V(g)$ 只依共軛類而定。有限群複表示完全可約，其不可約重數為 $a_i = (1/|G|) \sum_j |K_j| \chi_V(g_j) \text{conj}(\chi_i(g_j))$ ，其中 K_j 為共軛類，權重不能省略。本文矩陣表示是 $A \mapsto UAU^\dagger$ ，特徵標等於 $|\text{Tr} U|^2$ ，純量相位因此抵消。張量冪的特徵標只需逐類取 m 次方，再套加權內積。這得到重數與同構型，但不自動給出原空間中各不變子空間的明確基底。

一量子位元例子可完整手算

C_1 同構 S_4 ，有五個共軛類，依 e 、 H 、 P^2 、 HP 、 P 排列，大小為1、6、3、8、6，矩陣特徵標為(4,0,0,1,2)。 M_2 分成恆等矩陣張成的1維部分與無跡矩陣的3維不可約部分。二份張量積的不可約重數依論文順序是(2,1,1,3,0)，配合不可約維度(1,3,2,3,1)，總維度為16。平凡重數另有閉式 $a_m = (4^m + 8 + 6 \cdot 2^m)/24$ ， $m \geq 1$ 。

二與三量子位元的表格成果

C_2 有21個共軛類與21個不可約特徵標， M_4 分成1維與15維； C_3 有67個共軛類與67個不可約特徵標， M_8 分成1維與63維。固定 n 且已知表格後，即使張量次數提高，也只需處理21或67個類值。這不代表原表示空間變小，而是分解問題有較短的資料表示。計算仍受大整數位數與原始表格取得成本影響，不能宣稱任意 n 、任意 m 皆無成本。

Clifford群特徵標表與量子表示分解

arXiv:2309.14850v2 (2023) | 兩頁中文導讀

獨立核對與unitary design的連結

本導讀從附錄擷取 C_3 完整4489個整數，驗證行、列正交性及不可約維度平方和92,897,280，並重算 M_8 的一至六次張量冪；平凡重數為1、2、6、30、269、4403，皆通過非負整數及總維度 64^m 檢查。前三階符合Haar矩，第四階30不同於24，連結到Clifford為3-design卻非4-design的既有結果。此核對驗證表格內部一致性，並非獨立重做GAP群構造。

一般 $n \geq 3$ 的完美性

C_1 與 C_2 皆有平凡與sign兩個一維角色，但從 $n=3$ 開始只剩平凡角色，因此 C_n 等於導出子群，是完美群。證明可直接使用生成關係：將一維角色限制到各局部 C_1 ，只能是平凡或sign；生成元間的共軛性迫使各位置一致，而涉及三量子位元的關係排除負號選擇。完美並不等於單群，因為 P_n 仍是非平凡正規子群。

正規子群與忠實表示

對 $n \geq 3$ ， P_n 是 C_n 唯一的非平凡真正規子群。關鍵是 C_n/P_n 同構單群 $Sp(2n, 2)$ ，以及共軛作用傳遞於非單位Pauli元素。考察候選正規子群與 P_n 的交集及其商像，可能的正規補群會使整群成為直積，進而迫使Pauli共軛作用平凡，造成矛盾。因此任何對 P_n 非平凡的表示皆忠實。矩陣共軛表示對所有 n 皆忠實；一般忠實表示定理保證每個不可約表示終會出現於某個張量冪。

小參數例外與不能延伸的猜想

$n=2$ 時 $Sp(4, 2)$ 同構 S_6 ，並非單群； C_2 另有階5760的導出子群，因此一般 $n \geq 3$ 的敘述不能向下照搬。特徵標表在 $n=1, 2, 3$ 雖全為整數，但 $n=4$ 已有從 $Sp(8, 2)$ 拉回的非整數角色值，且反例延續到更大 n 。文章明確修正早期整數值猜想。本導讀也區分平凡重數與commutant維度：後者是全部不可約重數平方和，兩者不能混用。

研究意義與後續方向

本文把量子閘、有限群計算與表示論接成可操作工具，也由殺掉Pauli生成元的關係得到 $Sp(2n, 2)$ 的生成表示。後續可比較Clifford子群的高次矩，將特徵標重數轉為明確投影或不變子空間，並探索類似Young圖表的組合表示理論。來源：Chin-Yen Lee、Wei-Hsuan Yu、Yung-Ning Peng、Ching-Jui Lai，On character table of Clifford groups，arXiv:2309.14850v2 (2023)；Journal of Mathematical Physics 66(2) (2025)。

研究目標與資料來源

血清毛細管電泳及免疫減除（CZE-IS）的曲線判讀依賴經驗。本文把尖峰形狀、輕鏈比例與免疫球蛋白減除訊號寫成簡單公式，希望讓判讀更一致。研究使用林口長庚2023年4至9月的Sebia Capillarys 3 Tera儀器資料；每筆為 6×300 矩陣，包含原始P及anti-IgG、anti-IgA、anti-IgM、anti- κ 、anti- λ 五種抗血清曲線。300個時間點記錄200 nm吸光度；橫軸是遷移時間，不是蛋白質質量。

五類指標如何變成十個參考區間

五類指標是尖銳度、輕鏈、IgG、IgA與IgM，分別在 γ 與 β_2 區的選定峰位置評估，因此共有十個參考區間。建立區間使用4至8月的1000筆正常曲線，另外以9月20筆正常曲線驗證。至少兩位臨床病理醫師判讀參考樣本。這是依圖形正常與否作間接取樣，排除單株、多株及其他明顯異常曲線，不是由確認健康的一般人口隨機抽樣；因此不能直接推廣到所有病人或其他儀器。

尖銳度的有限差分與符號

採主文定義 $S(x) = 2P(x) - P(x-1) - P(x+1)$ ，即負的二階差分。教學例子[9,10,9]給 $S=2$ ，而同高度窄峰[6,10,6]給 $S=8$ ，說明峰高與尖銳度不同。主文正值 S 的 γ 參考區間為1至6， β_2 為3至17；附表A1卻列-6至-1及-17至-3，符號不一致，重現時必須核對。若相鄰點的獨立雜訊變異數皆 σ^2 ， S 的雜訊變異數為 $6\sigma^2$ ；這是公式推導，並非原研究估計值。

輕鏈比例及其數學限制

輕鏈指標 $Q = (P-K)/(P-L)$ ，在同一時間點比較 κ 與 λ 減除量。 γ 參考區間為1.06至2.71， β_2 為0.44至1.90。共同訊號縮放在比例中抵消，但分母接近零時，微小誤差可造成巨大變動； $P-L$ 恰為零時公式無定義。文章沒有完整交代近零處理規格。 Q 是曲線衍生指標，不是血清游離輕鏈檢驗的 κ/λ 比值，不能互換參考範圍，也不能當成絕對蛋白濃度。

免疫球蛋白指標是單點差值

定義 $\Delta G = P-G$ 、 $\Delta A = P-A$ 、 $\Delta M = P-M$ ，皆在選定峰位置計算，不是曲線面積積分。 γ 區IgG、IgA、IgM範圍依序為37至454、-9至41、-16至46； β_2 依序為-7至61、2至117、-12至35。低訊號與減除曲線重疊可造成負差值，不代表負的蛋白濃度。指標較高描述較大的相應減除訊號，單靠它並不能區分單株或多株型態。

參考區間與端點信賴區間不同

原文以D/R三分之一規則檢查極端離群值：D為極端值與相鄰值距離，R為樣本全距；D/R超過1/3則排除，再補足1000筆。接著以非參數2.5及97.5百分位數建立中央95%參考區間。參考區間描述個體分布，端點的信賴區間描述估計不確定性。方法章稱端點採90%雙尾信賴區間，附表註腳卻寫95%；本導讀保留這項出入，不把兩種水準混成同一結論。

20筆驗證不能改稱疾病準確率

依本文採用流程，20筆參考樣本中至多2筆超出區間可通過；5筆以上不通過，3或4筆需進一步測試。結果：尖銳度及輕鏈的 γ 各20/20、 β_2 各19/20在內；IgG與IgA兩區皆20/20；IgM為 γ 19/20、 β_2 20/20。因此所稱95%或100%是正常參考樣本的區間涵蓋率，並非疾病敏感度、特異度或整體診斷準確率。各指標涵蓋率也不能直接當成十項同時正常的比例。

三個病例說明指標如何互補

正常展示病例各項指標在參考區間內。IgG- κ 單株病例的尖銳度與輕鏈指標異常，但IgG仍在範圍內，說明不是每個指標都必須超標。IgG多株病例則有IgG升高，而尖銳度及輕鏈仍正常，表示訊號強度須與形狀及比例一起看。這三例是示範用途，沒有構成足夠的獨立疾病驗證集；本導讀不以單一指標推估疾病嚴重度或預後。

貢獻與後續研究問題

方法的價值在將可見曲線特徵寫成可手算、可檢查的數字，沒有訓練黑箱分類器。但研究未以控制實驗比較醫師使用前後的一致性，也未做機器學習模型的同資料比較。後續可設計盲性多讀者研究，評估一致性 κ 、敏感度、特異度及其信賴區間；另需跨中心、儀器及族群驗證。重現規格包括曲線對齊、區域與峰值選取、差分尺度、符號及近零分母處理。

來源與閱讀重點

Jia-Ruei Yu等十位作者，Improving Interpretation Consistency of Serum Capillary Electrophoresis by Development of Quantitative Graphic Indexes, International Journal of Molecular Sciences 25(22), 12240 (2024), doi:10.3390/ijms252212240。全文由PMC11594780取得；Richard H. W. Funk為學術編輯，非作者。原始資料需向作者申請，本導讀未獨立重算1000筆曲線。重點是理解公式、參考區間與驗證設計，讓數學推導與證據範圍相互對應。

糾纏輔助CWS量子碼大小的半正定規劃上界

arXiv:2311.07111v2 (2024) | 兩頁中文導讀

問題與糾纏資源模型

本文把半正定規劃（SDP）用於糾纏輔助codeword stabilized量子碼（EA-CWS），估計固定長度、距離與糾纏資源下的最大碼空間維度。 $((n,M,d;c))$ 中的 M 是量子子空間維度，不是可用量子態的離散個數；任意基底疊加仍是碼態。Alice的 n 個量子位元通過有雜訊通道，Bob預先持有 c 個假設無雜訊的糾纏夥伴，約化態應為 $I/2^c$ 。錯誤作用為 $E \otimes I$ ，故距離只數Alice端。本文的SDP成果針對EA-CWS類別，不能直接推成任意量子碼的通用排除。

偵測與無害作用必須分清楚

令 P 為碼空間投影，Pauli錯誤 E 可偵測當且僅當 $P(E \otimes I)P = \lambda P$ 。這是壓縮矩陣條件，一般不表示 E 在整個碼空間上乘 λ 。特別是 $PEP=0$ 代表 E 把碼空間送到其正交空間，不是 E 把向量變成零；Pauli是酉算子，會保留範數。以 $Q = \text{span}\{|00\rangle, |11\rangle\}$ 為例， $X \otimes I$ 把 Q 送到 $\text{span}\{|10\rangle, |01\rangle\}$ 而可偵測， $Z \otimes Z$ 在 Q 上為恆等而無害； $Z \otimes I$ 則在邏輯基底上為 $\text{diag}(1, -1)$ ，改變相對相位且不可偵測，所以此教學例子的 $d=1$ 。

CWS結構讓抽象條件可計數

最大穩定子群 S 決定參考態 $|S\rangle$ ，一組互相交換的word operators $W = \{I, \omega_2, \dots, \omega_M\}$ 作用於Alice，使 $(\omega_i \otimes I)|S\rangle$ 成為碼空間的正交基底。 W 不必形成群；形成適當阿貝爾群時才是EA穩定子碼的特殊情形。本文證明EA-CWS的廣義穩定子集合 $S_\lambda = \{E: P(E \otimes I)P = \lambda P\}$ 只有 $\lambda = 0, \pm 1$ 可能非空，因穩定子參考態對Pauli的期望只有這三種值。 $\lambda = \pm 1$ 確實給本徵作用； $\lambda = 0$ 仍須保留正交子空間的解釋。

找一批不可偵測錯誤就能給上界

令 $S_I = \{E: E \otimes I \in S\}$ 為參考態的isotropic subgroup， S_g 為固定整個碼空間的帶符號Pauli群，則 $S_g \subseteq S_I$ 。若 $E = \omega_i \beta$ ， $\beta \in S_I$ 且 ω_i 非恆等， E 會把參考態送到另一個word state，產生非零邏輯非對角矩陣元素，故 $WS_I \setminus S_I$ 中的錯誤都不可偵測。因此 $d \leq \min \text{wt}(WS_I \setminus S_I)$ 。更強的原文Lemma23使用 $WS_I \setminus S_g$ ，但較難建模。子集合的最小重量可能高於真正 d ，所以這個方便的式子是上界，不應自動改寫成等號。

列舉子把量子條件接到有限集合

Shor-Laflamme列舉子 $A_j = M^{-2} \sum |\text{Tr}(EP)|^2$ 與 $B_j = M^{-1} \sum \text{Tr}(EPEP)$ 滿足 $0 \leq A_j \leq B_j$ ，且 $j < d$ 時相等。EA情形以 $A_{i,j}$ 、 $B_{i,j}$ 分別記Alice和Bob重量，距離限制是 $A_{i,0} = B_{i,0}$ 。split MacWilliams與shadow非負性提供LP限制。關鍵的Lemma14把 $B_{i,0}$ 解釋成 WS_I 的平均距離列舉子，總和為 $|WS_I| = M^{2(n-c)}$ ；完整 B 則對應 $(W \otimes I)S$ ，總量為 $M^{2(n+c)}$ 。這兩種重量與正規化不可混用。

糾纏輔助CWS量子碼大小的半正定規劃上界

arXiv:2311.07111v2 (2024) | 兩頁中文導讀

SDP如何使用三點資料

令 $T_1=S_I$ 、 $T_2=WS_I$ ，在忽略整體相位的四字母Pauli空間中，三點關係由 i 、 j 、 t 、 p 描述： i 和 j 是兩條相對字的重量， t 是共同非 I 座標數， p 是其中符號相同的座標數，第三距離為 $i+j-t-p$ 。四類三點分別來自 T_1^3 、 T_2^3 、 $T_1 \times T_2^2$ 、 $T_2 \times T_1^2$ 。集合指示向量外積 $\chi\chi^T$ 必半正定，對對稱群與基點在集合內外取平均，得到8組PSD限制。Terwilliger代數把原本 4^n 階矩陣區塊化； $n=10$ 時最大區塊只有11階，但仍有多個區塊與變數類別。

數值成果應如何讀

固定 n 、 M 、 d 、 c 後，若必要的LP與PSD條件不可行，便可排除對應EA-CWS參數；鬆弛可行則不保證真碼存在。TableII的 $a(b)$ 代表SDP上界 a 、LP上界 b 。例如 $(n,c,d)=(3,2,3)$ 由4降3， $(4,3,4)$ 由8降3， $(10,4,4)$ 由144降140。這些是作者報告的碼維度上界，不是相同大小的構造。對 $c=0$ ，原文沒有觀察到超越包含shadow的完整LP； $((10,9,4;0))$ 雖可由SDP排除，加入shadow後的LP也能排除，不能因此說SDP全面勝出。

交換關係與可核算的6維例子

在 $c=0$ 的CWS碼中，對參考態穩定子的相位類 β ，令 W_c 、 W_a 分別數與 β 交換及反交換的word operators。 A_j 是重量 j 的 $(W_c - W_a)^2/M^2$ 之和，因此一般可能為分數。原文 $((5,6,2;0))$ 例子給 $A=(1,0,0,0,5/3,8/3)$ 。本導讀用精確分數重算MacWilliams變換，得到 $B=(1,0,20,50,75,46)$ ； $A_2=0 < B_2=20$ 確認 $d=2$ 。 $\Sigma A=16/3=32/6$ 、 $\Sigma B=192=6 \cdot 32$ 也符合正規化。此例的shadow向量 $D=(0,30,60,360,420,282)$ 亦以帶符號變換重算相符。

shadow意義與來源中的符號差異

shadow以 $P=Y^\wedge \otimes n$ $PY^\wedge \otimes n$ 及非負量 $\text{Tr}(EPEP)$ 定義；CWS穩定子態的複共軛可由Pauli平移得到，因此可解釋成 WS 與另一個Pauli平移集合之間的距離計數，但仍須核對交疊與正規化。原文 § IV把 $PEP=0$ 寫成算子消滅碼態的文字不正確，本導讀採正交空間解釋。另Theorem30把 $T_2=WS_I$ 連到總重量 $\Sigma_{(r+s=i)} B_{r,s}$ ，與Lemma14的 $B_{i,0}$ 及總量不一致；此處依定義清楚區分，沒有宣稱只改一式就重現或驗證完整程式。

貢獻、限制與來源

方法的核心是把不可偵測Pauli錯誤整理成兩個有限集合，以三點幾何與矩陣正性增強量子碼上界，同時解釋 A 與shadow列舉子的組合意義。更強的錯誤子集合、更高點數與可核查的對偶證書仍是研究方向。來源：Ching-Yi Lai、Pin-Chieh Tseng、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds on the size of entanglement-assisted codeword stabilized quantum codes，arXiv:2311.07111v2 (2024)。數值程式為PinChiehTseng/SDP_quantum_code。本導讀重算上述例子，未獨立重跑整張SDP表，也不宣稱其為2026最新紀錄。

從rank 3圖得到的實等角緊框架

arXiv:2202.09858v2 (2024) | 兩頁中文導讀

研究範圍與兩個分類定理

本文研究非平凡實等角緊框架（ETF），即 R^N 中 M 個單位向量，任意兩個不同向量的內積絕對值固定，且總平方投影能量在每個方向相同；非平凡範圍為 $2 \leq N \leq M-2$ 。定理3.2分類從 M 頂點primitive rank 3圖直接球面嵌入得到的ETF；定理5.1則分類至少一個 $M-1$ 頂點後裔圖為primitive rank 3的ETF。這兩個來源限制必須保留，不能稱為所有實ETF的全面分類。

Welch界與tight的意義

令Gram矩陣 G 的 ij 元素為向量內積，則 G 半正定、跡為 M 、秩至多 N 。由特徵值的Cauchy-Schwarz得 $\text{Tr}(G^2) \geq M^2/N$ ，再比較非對角元素最大絕對值，得到coherence至少 $\sqrt{(M-N)/(N(M-1))}$ 。等號要求 N 個非零特徵值相同，並且所有非對角元素的絕對值相同，正好等價於tight與等角。這是固定 M 、 N 下最小化最大相關的最佳性，不是任意球面碼目標的全面最佳性。

rank 3是群作用而非矩陣秩

強正則圖以 (v, k, λ, μ) 表示：每點度數 k ，相鄰或非相鄰的不同點各有 λ 或 μ 個共同鄰點。primitive要求圖與補圖皆連通。rank 3指傳遞自同構群的點穩定子有三個軌道：該點、鄰點、非鄰點，並非 $\text{rank}(A)=3$ 。鄰接矩陣滿足 $A^2 = kI + \lambda A + \mu \bar{A}$ ，故 I 、 A 、 $\bar{A}$ 張成三維Bose-Mesner代數；額外的兩個特徵值 r 、 s 解 $\xi^2 + (\mu - \lambda)\xi + (\mu - k) = 0$ 。

由投影建構向量與等角判準

令 E_s 為 s 特徵空間的正交投影，重數為 g ，則 $\phi_x = \sqrt{v/g}(E_s)_x$ 是單位向量，Gram為 $(v/g)E_s$ ，且在該 g 維空間上的frame operator自動為 $(v/g)I$ 。因此只需檢查等角性。相鄰及非鄰的內積分別為 s/k 與 $(-s-1)/(v-k-1)$ ，兩者相加為零便是ETF。另一個等價描述是 $v=2(2k-\lambda-\mu)$ 時，圖或補圖的其中一個球面嵌入為ETF。

28條線例子與補空間的差異

以 $\text{SRG}(28, 15, 6, 10)$ 為例， $r=1$ 、 $s=-5$ 、 $g=7$ ，兩種內積為 $-5/15$ 及 $4/12$ ，即 $\pm 1/3$ ，得到28個7維向量並達Welch界。Naimark補取 $I - E_s$ ，得到維度 $28-7=21$ 的另一個ETF，其角度絕對內積為 $1/9$ 。它不是補圖的球面嵌入：補圖使用 E_r ，維度為20。差異來自 $I - E_s = E_k + E_r$ ，包含額外的常數特徵空間。

從rank 3圖得到的實等角緊框架

arXiv:2202.09858v2 (2024) | 兩頁中文導讀

定理3.2的完整名單與證明策略

作者利用Brouwer與Van Maldeghem整理的primitive rank 3圖分類，對product action、almost simple及affine類型逐案檢查ETF條件，包含電腦輔助計算。通過者為六個無窮族 $\text{NO}\pm_{\{2n\}}(2)$ 、 $\text{NO}\pm_{\{2n+1\}}(4)$ 、 $\text{VO}\pm_{\{2n\}}(2)$ ，加上 $G_2(2)$ 及 M_{22} 兩個零星圖。小參數可能同構，不能把族名當成互不重疊的參數集；補充計算收錄於Zenodo 10849838，本導讀未獨立重跑全部分類。

從496點動機到可寫出的座標

研究起源之一是 R^{156} 中的496點構型，內積0或 $1/8$ ，所在超平面離原點 $1/4$ 。移到超平面中心並重新正規化，內積變為 $(t-1/16)/(15/16)$ ，即 $\pm 1/15$ ，在155維形成ETF。對仿射 $\text{VO}+$ 族還可直接寫出實座標：在 F_2^4 取 $q(z)=z_1z_2+z_3z_4=1$ 的六個 z ，令 $\phi_x(z)=(-1)^B(x,z)/\sqrt{6}$ ， x 遍歷16個點， B 為 q 的極化雙線性型，便得到16個6維向量、內積 $\pm 1/3$ 。

兩個零星構型與後裔建構

$G_2(2)$ 圖以Fano平面的7點、7線、21旗與額外 ∞ 為36頂點，參數 $(36,21,12,12)$ ，產生 $(36,21)$ ETF。 M_{22} 圖來自 $2-(22,7,16)$ 設計的176個區塊，交集3時相鄰，產生 $(176,154)$ ，其Naimark補為 $(176,22)$ 。另一條建構路線利用後裔SRG的 $k=2\mu$ 條件：以 $J-I-2A$ 為右下區塊、全1向量為邊界、左上為0的Seidel矩陣 S ， $I+S/(1+2r)$ 給 $M=v+1$ 、 $N=g+1$ 的ETF。

定理5.1與等價性問題

後裔分類包含二元辛圖、正交圖、Paley與Peisert族，以及McLaughlin等零星情形。Paley要求 q 為 $1 \bmod 4$ 質數冪；Peisert要求 q 為 $3 \bmod 4$ 質數的偶次冪，兩者皆給 $(q+1, (q+1)/2)$ 。McLaughlin給 $(276,23)$ 。 $\text{NU}_3(3)$ 雖滿足 $k=2\mu$ 但rank為4，故不在此分類中。同參數不等於同構型；文章提出若干ETF等價性問題，需比較正交變換、向量換號與排列，或圖的switching equivalence。

研究意義與可延伸的實作

本文把群作用分類、譜圖論與最佳線配置連接成可逐案驗證的方法。可從小參數圖開始，精確驗證投影、Gram與Welch等號，再比較三元組乘積等switching不變量；若找到signed permutation，便能提供可直接檢查的等價證書。來源為Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Chin-Yen Lee、Hajime Tanaka、Wei-Hsuan Yu，The real equiangular tight frames obtained from rank 3 graphs，arXiv:2202.09858v2；EJGTA 12(2), 329–341 (2024)。

球面三距離集合的半正定規劃上界

arXiv:2005.01324v1 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與23維的答案

球面三距離集合是 R^n 中的有限單位向量集，不同點的內積恰有三種值 $d_1 < d_2 < d_3$ ；因 $\|x-y\|^2 = 2-2\langle x,y \rangle$ ，也等價於三種歐氏距離。本文結合調和維度界、Nozaki整數性、半正定規劃與平方和，證明23維最大大小為2300。已知4600點的反tight 7-design每對取一點可得2300點三距離集合，內積為 $-1/3$ 、 0 、 $1/3$ ，提供下界；全域上界則必須涵蓋所有可能的三內積，不能只檢查這個特殊構造。

調和界與特殊內積算例

一般Delsarte–Goethals–Seidel上界為 $n(n+1)(n+5)/6$ ，在23維是2576。若固定三個內積，取 $f(x) = \prod (x-d_i)$ ，使 $f(1) > 0$ ，展開成正規化Gegenbauer基底；正係數所對應的調和空間維度之和給上界。對 $-1/3$ 、 0 、 $1/3$ ， $f = x^3 - x/9 = (2/225)G_1 + (22/25)G_3$ ，故 $|X| \leq h_1 + h_3 = 23 + 2277 = 2300$ 。原文乘積符號與例子係數不一致，導讀採上述一致規約。此算例只是固定內積的上界，尚未處理其他候選。

從兩點LP到三點SDP

球面調和加法公式給 $\sum_k (x,y) G_k(\langle x,y \rangle) \geq 0$ ，導出平均鄰居數的LP限制。SDP再看三點內積 (u,v,t) ，將兩向量投影到第一向量的正交補空間，得到 $(t-uv)/\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}$ 的投影內積，再構成Bachoc–Vallentin矩陣核並對六種置換對稱化。本文使用13個三元組計數變數：3種重複點型態與10種不同點型態；搭配非負計數、 2×2 矩條件、LP次數18及SDP核次數6。其目標為 $1+(x_1+x_2+x_3)/3$ ，變數正規化與LP不同。

整數條件把搜尋降為一維

Nozaki定理指出， $N = h_0 + h_1 + h_2 = n(n+3)/2$ 且 $|X| \geq 2N$ 時， $K_i = \prod_{j \neq i} (d_j - 1)/(d_j - d_i)$ 為有界整數；較小集合直接由 $2N-1$ 控制。Lagrange插值給 $\sum K_i = \sum d_i K_i = \sum d_i^2 K_i = 1$ 。固定有限種整數三元組，令 $a = d_3$ ，便能將 d_1 、 d_2 寫成 a 的仿射函數，再保留合法順序的區間。23維 $N = 299$ ，小集合上界597，原文列66種整數三元組；特殊構造對應 $(3, -8, 6)$ 。整數參數可行不代表實際點集必然存在。

兩種上界互補

對每個候選參數，取harmonic bound與SDP bound的較小者，再對所有候選取最大，並納入小集合門檻。靠近某些端點時LP／SDP可能變大，但harmonic bound仍能控制；另一部分區域則靠SDP改善。23維中 $(1, -3, 3)$ 與 $(2, -6, 5)$ 分支的取樣LP最大值約2385.60、2319.82，而SDP約1072.29、1693.01。這些最大值未必發生在相同參數，更不能把有限取樣結果直接當成整段區間的嚴格上界。

球面三距離集合的半正定規劃上界

arXiv:2005.01324v1 (2020) | 兩頁中文導讀

為何取樣圖還不是證明

即使網格很密、圖形看起來平滑，兩個取樣點之間仍可能出現更大的值。本文因此把對偶限制改寫成單變數 a 的多項式非負條件，尋找在整個 $[L,U]$ 上可行的同一組對偶變數，使對偶目標成為統一上界。這同時涉及連續參數覆蓋與數值可行性；只檢查求解器沒有警告，或只保存幾個網格點的答案，都不能取代所需的區間證書。

平方和如何變成半正定規劃

令 $a=(L+Uz^2)/(1+z^2)$ ，對 m 次多項式 f 乘上 $(1+z^2)^m$ ，得到 $F(z)$ 。有限 z 涵蓋 $[L,U]$ ，端點 U 以極限與連續性補入，因此區間非負性可轉為整條實線上的一元多項式非負性。一元非負多項式可寫成平方和，亦即 $F=v^T Q v$ 、 $Q \geq 0$ ， $v=(1,z,\dots,z^m)$ 。係數比對是線性條件，故可用SDP尋找 Q 。這個等價是單變數的重要特性，不能擴張成所有多變數非負多項式都必為平方和。

整數門檻的重要細節

Table5在23維、 $K=(3,-8,6)$ 、 $a \in [0.332, 0.335]$ 報告SOS上界2300.85。它其實大於2300，與原文「所有SOS值都小於harmonic bound」的文字不完全一致；但 $2300.85 < 2301$ ，加上 $|X|$ 是整數，仍可推出 ≤ 2300 。導讀採這個正確解釋。其他關鍵分支有1234.62與1703.71等值。表格只列關鍵區間，完整論證仍需所有分支與區間覆蓋，以及矩陣與係數的可驗證性；本導讀未獨立重跑完整證書。

六個維度的成果與未解問題

相對原文引用的舊上界， $n=7$ 由91降84， $n=20$ 由1541降1540， $n=21$ 由1772降1771， $n=23$ 由2301降2300， $n=24$ 由2601降2600， $n=25$ 由2926降2925。23維因已知構造而得到精確答案；其他改善不能都寫成等號。7維原文已知下界64，半個 E_7 只有63點。PSL(2,7)群軌道與能量最小化搜尋未找到84點，並不證明84點不存在，也不能把作者的期待寫成已完成構造。

方法意義與來源

本文的價值在於把有限整數分類、局部凸最佳化與連續區間的平方和控制接起來，展示由計算探索走向全域上界的路徑。它沒有給所有維度的閉式最大值，也沒有證明每個tight7-design的半集必定全域最大。來源：Feng-Yuan Liu、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds for spherical three-distance sets，arXiv:2005.01324v1 (2020)。導讀中的數值比較是此版本報告的歷史成果，不宣稱是2026年的最新紀錄。

以非凸Riemannian梯度下降重建量子態

arXiv:2210.04717v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題與低秩假設

q 個量子位元的密度矩陣 ρ 大小為 $d \times d$ ，其中 $d=2^q$ ，必須Hermitian、半正定且跡為1。完整量子態重建希望由有限量測估計整個 ρ ；本文假設 $\text{rank}(\rho)=r$ 遠小於 d ，利用低秩結構降低計算負擔。這是實質假設，不是所有量子態的普遍性質。秩 r Hermitian矩陣的實參數數量為 $2dr-r^2$ ，跡1再少一個自由度，遠低於一般 d^2 尺度。本文採非凸Riemannian gradient descent (RGD)，並分析有限shot雜訊下的收斂與誤差。

取樣設定與量測次數是兩件事

隨機抽 m 個Pauli可觀測量 S_i ，定義 $A(X)_i = \sqrt{d/m} \text{Tr}(S_i X)$ ，伴隨 $A \dagger y = \sqrt{d/m} \sum y_i S_i$ 。這個尺度使平均意義下 $A \dagger A$ 接近恆等。每個設定實際量測 l 次，得到 ± 1 結果，其平均再乘 $\sqrt{d/m}$ 才是輸入 y_i 。總shots為 $m \cdot l$ ，不能只用 m 描述實驗成本。資料模型是 $y=A(\rho)+z$ ，噪音以矩陣spectral norm $\|A \dagger z\| \leq \lambda$ 控制。所有迭代重用同一批資料，不需要每步重新量測。

把量子態問題放寬成低秩最小平方

演算法最小化 $\frac{1}{2} \|y - A(X)\|_2^2$ ，限制 X 為Hermitian且 $\text{rank}(X) \leq r$ ，但放寬PSD與跡1。因此任意有限步輸出不應無條件稱為物理密度矩陣。初始化 $X_0 = H_r(A \dagger y)$ ，其中 H_r 保留最大 r 個奇異值，給最佳秩 r 近似。對目前 X 的行列支撐投影 P_U 、 P_V ，切空間投影為 $P_T(G) = P_U G + G P_V - P_U G P_V$ ；投影方向秩至多 $2r$ 。它保留與低秩曲面相容的局部方向，避免每步在全部矩陣自由度中搜尋。

每次更新的清楚流程

先算殘差方向 $G = A \dagger (y - A(X))$ ，再投影 $D = P_T(G)$ 。若 D 非零，取 $\alpha = \|D\|_F^2 / \|A(D)\|_2^2$ ，形成 $W = X + \alpha D$ ，最後 $X_{\text{new}} = H_r(W)$ 。 α 是截斷前沿直線的精確line search，不是沿截斷後曲線的精確最小化； $D=0$ 需停止或另處理，不能算 $0/0$ 。切向 W 至多秩 $2r$ ，因此截斷可透過小矩陣處理。此方法與FGD的 $X=UU \dagger$ 因子化不同，後者目標對 U 是四次式，線搜尋較複雜，但不能絕對說其數學上不可能精確求解。

一個手算例子與RIP意義

以兩量子位元 $\rho = \text{diag}(0.8, 0.2, 0, 0)$ 、手選目前 $X = \text{diag}(0.7, 0.3, 0, 0)$ 、 $r=2$ 為例，假設完整等距量測且無雜訊，便有 $D = \text{diag}(0.1, -0.1, 0, 0)$ 、 $\alpha=1$ ， $W=\rho$ 且 $H_2(W)=W$ 。這只是更新示範，完整量測下的規定初始化其實已是 ρ 。一般壓縮情形需要RIP： $(1-\delta_s) \|X\|_F^2 \leq \|A(X)\|_2^2 \leq (1+\delta_s) \|X\|_F^2$ 對秩 $\leq s$ 成立，表示量測不過度扭曲低秩幾何，而非對所有矩陣都等距。

以非凸Riemannian梯度下降重建量子態

arXiv:2210.04717v1 (2022) | 兩頁中文導讀

主要定理與不能省略的條件

設 $\kappa=\sigma_1/\sigma_r$ 為 ρ 的非零特徵值條件數。當 $\lambda\leq C_1\sigma_r/\sqrt{r}$ 、 $m\geq C_2\kappa^2r^2d\log^6d$ ，配合指定初始化，原文證明 $e_k=\|X_k-\rho\|_F\leq e_0\bar{\gamma}^k+2\sqrt{2r}\lambda/((1-\delta_3r)(1-\bar{\gamma}))$ ， $\bar{\gamma}<1$ 可取通用常數。第一項隨迭代下降，第二項是雜訊底限。收斂因子不依 κ ，不表示總成本不依 κ ：取樣充分條件有 κ^2 ，雜訊門檻也依 σ_r 。不能把 $\log(1/(\kappa\epsilon))$ 的表述解釋為條件數越差就無代價地越容易重建。

證明的骨架與誤差尺度

Eckart-Young與三角不等式先給 $e_{\text{new}}\leq 2\|\rho-W\|_F$ 。接著將誤差分成RIP造成的線性項、切空間曲率造成的 $2e_k^2/\sigma_r$ ，以及 $O(\sqrt{r}\lambda)$ 的加法雜訊項。初始化滿足 $e_0\leq 2\delta_2r\|\rho\|_F+2\sqrt{2r}\lambda$ ，足夠近時能控制二次項。原文一組充分條件為 $\lambda\leq\sigma_r/(20\sqrt{2r})$ 、 $\delta_3r\leq 1/(80\kappa\sqrt{r})$ ，得到 $\bar{\gamma}<0.45$ 。差矩陣的秩至多 $2r$ ，所以核範數誤差 $\leq\sqrt{2r}$ 倍Frobenius誤差，進而得到 $O(r\lambda)$ ；比較兩種誤差必須保留秩因子。

迭代次數與每步成本

無雜訊時要達絕對誤差 ϵ ，只需取 k 不小於 $\log(e_0/\epsilon)/\log(1/\bar{\gamma})$ 的非負整數上整數；有雜訊時只需把初始化項壓到雜訊尺度，繼續迭代不會提高資料本身精度。每步可用兩次 $d\times 2r$ 的QR與一次 $2r\times 2r$ 的SVD，但切空間投影仍有 $O(d^2r)$ 矩陣乘法。原文Remark5給 $O(d^2r+dr^2+r^3)$ ，另需計入 A 、 $A^\dagger$ 的應用、初始化及資料取得成本。不能只引用小矩陣SVD成本便宣稱全部每步為 $O(dr^2)$ 。

數值實驗與正確讀圖方式

原文用Qiskit與IBM量子模擬器產生6、8量子位元的 $|+\rangle$ 張量態與GHZ態資料，均為純態 $r=1$ 、 $\kappa=1$ 。四個設定的 m 依序為819、1638、13107、26214，各設定8192shots；最大案例總計214745088shots。比較MIFGD的固定步長0.01與五種動量設定，RGD在圖中較快收斂。橫軸是迭代步數而非秒數，縱軸是平方Frobenius誤差。ExactRGD使用精確期望值，與有限shot版本不同；這些純態實驗也未掃描不同 κ 來獨立展示條件數優勢。

物理性、來源與研究意義

秩限制由截斷維持，但PSD與跡1並未每步強制。若Hermitian秩 r 估計與 ρ 的算子範數距離小於 σ_r ，可由Weyl推得 r 個正特徵值；跡仍不必恰為1，必要時需另行說明後處理。本文價值在低秩計算與誤差保證的結合，範圍是足夠取樣、低雜訊與合適初始化。來源：Ming-Chien Hsu、En-Jui Kuo、Wei-Hsuan Yu、Jian-Feng Cai、Min-Hsiu Hsieh，Quantum state tomography via non-convex Riemannian gradient descent，arXiv:2210.04717v1 (2022)。本導讀未獨立重跑全部實驗，也不宣稱2022比較代表2026最新紀錄。

只有兩種、三種與四種距離的二元碼之最大大小

arXiv:2210.07496v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：限制距離的種類

本文研究二元碼中不同碼字之間只出現少數距離時，最多可以放多少碼字。Hamming距離 d_H 計算不同座標數； s -distance code指所有不同碼字對的距離恰有 s 種，並不是最小距離等於 s ，也不要求碼為線性。主要完整結果是對每個 $n \geq 6$ ， $A(H_2^n, 2) = 1 + \text{binom}(n, 2)$ 。下界很直接：取零向量及所有重量2的向量，任兩個不同碼字距離只會是2或4。 $n=6$ 時此構造有16字。困難在於上界必須涵蓋任何可能的兩個距離，而不只構造使用的2與4。

把Hamming問題轉成等角線問題

將二元字 x 映成 $v(x) = ((-1)^{x_1}, \dots, (-1)^{x_n}) / \sqrt{n}$ ，便有 $\langle v(x), v(y) \rangle = 1 - 2d_H(x, y)/n$ 。設距離 $a > b$ 對應內積 $\alpha < \beta$ 。若 $a + b \leq n$ ，可直接套用二距離調和上界得到目標；若 $a + b > n$ ，則 $\alpha + \beta < 0$ 。新增正交單位向量 e ，令 $y_i = tv_i + \sqrt{1-t^2}e$ 、 $t^2 = 2/(2-\alpha-\beta)$ ，新內積變成 $\pm 1/\gamma$ ，其中 $\gamma = (a+b)/(a-b)$ 。因此原碼嵌入 R^{n+1} 的等角線集合，可使用既有等角線上界。

如何處理少數例外

等角線估計一般已給 $|C| \leq \text{binom}(n, 2)$ ，只留下 γ 為奇整數且 $n = \gamma^2 - 2$ 或 $\gamma^2 - 3$ 的例外。令 $\gamma = 2m + 1$ ，再利用距離的整數性、 $a + b > n$ 與 $b \leq n/2$ ，可把例外縮成 $a = (m+1)(2m+1)$ 、 $b = m(2m+1)$ 。若兩內積都負，Rankin界早已足夠。剩下的參數再用球面二距離上界 $(n+2)/((1-(n-1)/(n(1-\alpha)(1-\beta)))$ 處理，分母在所用條件下為正。 $n=6$ 、 $a=6$ 、 $b=3$ 可直接算得 $96/7$ ；其餘例外也低於目標整數門檻，於是上下界吻合。

固定重量：距離等價於交集

Johnson空間 $J^n(n, w)$ 由所有重量 w 的字組成，可視為 n 元素集合的 w 子集，通常假設 $2w \leq n$ 。Johnson距離 $d_J(A, B) = w - |A \cap B| = d_H(A, B)/2$ ；必須注意它只有Hamming距離的一半。標準 s 距離構造固定 $w-s$ 個共同元素，再從其餘 $n-w+s$ 個元素中選 s 個，得到 $\text{binom}(n-w+s, s)$ 個碼字與距離1到 s 。例如 $n=12$ 、 $w=4$ 、 $s=2$ ，固定 $\{1, 2\}$ 並從 $\{3, \dots, 12\}$ 再選兩元素，得到45字。這先給下界，最大性仍須排除所有其他距離組合。

禁止交集與EKR的角色

若禁止兩個 w 子集的交集恰為 l ，對每個固定 l 子集考慮包含它的成員，再刪除該 l 子集，剩餘族必兩兩相交。 $n \geq 2w - l$ 時可用Erdős-Ko-Rado定理，再對所有 l 子集雙重計數，得到 $m(n, w, \text{forbid } l) \leq (w-l)/(n-l) \cdot \text{binom}(n, w)$ 。 $l=0$ 用通常EKR。由此對 $n \geq 2w$ 得到 $A(J^n(n, w), w-1) = \text{binom}(n-1, w-1)$ ，由固定一個共同元素的星形族達成。這是一整族精確答案，也提醒讀者保留 $2w \leq n$ 的基本範圍。

只有兩種、三種與四種距離的二元碼之最大大小

arXiv:2210.07496v1 (2022) | 兩頁中文導讀

Hahn多項式與可手算的對偶證書

在Johnson空間，正規化Hahn多項式滿足 $\psi_k(0)=1$ 。若 f_j 表示距離 d_j 的平均鄰居數，則 $f_j \geq 0$ 、 $|C|=1+\sum f_j$ ，而且 $\sum f_j \psi_k(d_j) \geq -1$ 。選非負權重 y_k ，使每個允許距離都滿足 $\sum y_k \psi_k(d_j) = -1$ ，加總便得 $|C| \leq 1 + \sum y_k$ 。對 $n=12$ 、 $w=4$ 、距離 $\{1,2\}$ ，精確計算得 $\psi_4(1)=-1/8$ 、 $\psi_4(2)=1/28$ 、 $\psi_3(1)=1/16$ 、 $\psi_3(2)=-1/14$ 。取 $y_4=20$ 、 $y_3=24$ ，兩個距離的加權係數都為 -1 ，故上界45，與共同核心構造吻合。

整數條件與精確範圍

Nozaki定理指出 $N=\text{binom}(n,s-1)$ 且 $|C| \geq 2N$ 時， $K_i = \prod_{j \neq i} d_j / (d_j - d_i)$ 為有界整數，因此只需細查少量距離組合；不符合者上界為 $2N-1$ 。結合解析LP證書與小參數計算，兩距離Johnson碼在 $w=4$ 、 $n \geq 9$ ， $w=5$ 、 $n \geq 12$ ， $w=6$ 、 $n \geq 35$ 時分別達 $\text{binom}(n-w+2,2)$ 。 $w=6$ 另外 $15 \leq n \leq 24$ 也由計算涵蓋，不能把25至34的缺口補成已證。三距離時 $w=5$ 、 6 、 7 分別在 $n \geq 12$ 、 16 、 20 達共同核心大小；四距離例如 $w=6$ 、 $n \geq 15$ 也得到精確答案。

小參數計算與三點資訊

解析行列式的符號往往只在充分大 n 成立，有限小 n 需要枚舉距離集合並求LP或Schrijver三點SDP。若 $2N-1$ 仍高於目標，連未滿足整數條件的距離組合也不能略過。本文新增Johnson參數包括三距離 $(n,w)=(12,5)$ ，以及四距離 $(15,6)$ 、 $(16,6)$ 。Hamming三距離則在 $8 \leq n \leq 22$ 、 $24 \leq n \leq 37$ 與 $n=44$ 有 $A=n+\text{binom}(n,3)$ ，新補入34與35。 $n=23$ 的Golay相關2048字構造超過標準1794字，說明三距離情形不能直接推成所有 n 的統一等式。

一般猜想與方法限制

對固定 $w>s$ ，本文討論充分大 n 時 $A(J^n(n,w),s)=\text{binom}(n-w+s,s)$ 的一般猜想，但沒有證明所有 w,s 。選定Hahn證書可給 $c(w,d_1,d_2)n^2$ 階上界；距離 $\{1,2\}$ 得到正確首項 $1/2$ ，但 $w=7$ 、距離 $\{2,4\}$ 只有 $35/64 > 1/2$ ，不足以達到猜想所需的主項。這是方法限制，不是 $35n^2/64$ 構造的存在證明。即使最大大小已確定，也不等於所有最優碼已分類或唯一。原文部分表格與定理範圍、四距離二項式下標有差異，本導讀以定理及數值命題交叉核對。

來源與閱讀方式

來源為Alexander Barg、Alexey Glazyrin、Wei-Jiun Kao、Ching-Yi Lai、Pin-Chieh Tseng、Wei-Hsuan Yu，On the size of maximal binary codes with 2, 3, and 4 distances，arXiv:2210.07496v1 (2022)。本文使用Mathematica、CVX與MOSEK，公開程式位於github.com/PinChiehTseng/s-distance-set。本導讀獨立以有理數重算45字證書，但未重跑全部LP與SDP，也不宣稱表格代表2026最新紀錄。建議先掌握Hamming球面嵌入，再跟算Johnson的45字例子，最後閱讀整數條件與漸近限制。

分割 Terwilliger 代數的二元碼上界

arXiv:2203.06568v4 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要成果

$A(n,d)$ 表示長度 n 、任意兩個不同碼字Hamming距離至少 d 的二元碼最大大小；碼不必線性。本文將座標分區，保留更細的三點距離資訊，再利用split Terwilliger algebra導出半正定限制。作者以此把 $A(18,4)$ 的已知上界由6552改善為6551，並估計對偶誤差以支持整數上界。這不是6551碼字的建構，也不是證明 $A(18,4)=6551$ 。ISIT2022的相關會議版本與此文可共用這組導讀資源。

從距離分布到三點限制

距離分布 A_j 是距離 j 的有序碼字對數除以 $|C|$ ，因此 $A_0=1$ 、 $\sum A_j=|C|$ ， $1 \leq j < d$ 時 $A_j=0$ 。Delsarte LP另要求Krawtchouk轉換非負。Schrijver SDP則看三元組 (X,Y,Z) ：把 X 以XOR平移至零，記兩個相對支持集大小 i 、 j 及交集 t ，第三邊距離便為 $i+j-2t$ 。三點資訊比兩點分布更細，可排除某些雖滿足距離平均、卻不符合局部幾何的候選解。

半正定性與對稱化

碼的指示向量 χ 給出外積 $\chi\chi^T$ ，因 $v^T\chi\chi^Tv=(v^T\chi)^2 \geq 0$ 而半正定。對等距變換取平均，並依零字是否在變換後的碼中分成 R 與 R' ，仍保留半正定性。固定零字後的座標置換軌道由 (i,j,t) 描述，形成Terwilliger代數；其維度為 $\text{binom}(n+3,3)$ ，可分成大小 $n-2k+1$ 的區塊。這裡須區分包含平移的全等距群與固定零字的穩定子，否則個別重量 i 、 j 並不被保留。

分割如何保留更多資訊

把座標分為 T_1 、 T_2 ，大小 $|n_1|+|n_2|=n$ 。同一總距離4可分為 $(0,4)$ 、 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ ，一般距離分布會把這些不同情況合併。分割三元組使用六個索引 $(i,j,t;i',j',t')$ ，並對兩區分別計算支持大小與交疊。最小距離限制必須用總三邊距離，不能要求每一區都至少 d 。三條邊的分區向量也必須同步置換，不能在兩區各自隨意交換。

張量積讓新限制可計算

分割軌道矩陣等於兩個局部矩陣的Kronecker乘積，因此 $A_{(n_1,n_2)} \cong A_{(n_1)} \otimes A_{(n_2)}$ 。區塊 (k,k') 大小為 $(n_1-2k+1)(n_2-2k'+1)$ 。在 $18=2+16$ 時，每個PSD家族有18個區塊，最大51階，相較原矩陣262144階小得多。這是代數同構下去除重複表示，不是任意裁切。 R_s 與 R'_s 兩種條件平均各提供一組新限制，不能只保留其中一種便宣稱得到相同結果。

分割 Terwilliger 代數的二元碼上界

arXiv:2203.06568v4 (2023) | 兩頁中文導讀

變數、目標與線性一致性

三元組計數 λ 以 $|C|$ 及軌道大小正規化成 x ；軌道大小須包括「只在第一支持、只在第二支持、兩者都有、兩者都無」四類座標的階乘，分割時取兩區乘積。目標 $\sum \text{binom}(n_1, i) \text{binom}(n_2, i') x_{\text{pair}}$ 仍是碼大小。變數滿足 $0 \leq x_{\text{triplet}} \leq x_{\text{pair}} \leq 1$ 、正規化、邊置換與禁距離條件。原始 λ 可由分割 λ 相加，正規化 x 卻必須帶軌道比例聚合，不能直接求和。原文多項係數的剩餘階乘漏項，導讀依正確軌道計數解釋。

為何還要加入已知限制

R_s 與 R'_s 的非負線性組合落在分割Bose–Mesner代數，同時對角化可推出 $\sum A_{ij} K_p^{(n_1)}(i) K_q^{(n_2)}(j) \geq 0$ ，所以split SDP包含split Delsarte頻譜限制。實際模型還整合原始Schrijver PSD、Best與Mounits–Etzion–Litsyn不等式，以及常重量、雙常重量碼上界。例如 $A_i \leq A(n, d, i)$ ，因固定碼字平移後，其距離 i 鄰居形成常重量碼。加強LP有額外組合限制，故不能只以「SDP」名稱判定任何設定都優於它。

對偶誤差如何變成可靠上界

設原始SDP為 $\max c \cdot x$ ， $F_0 + \sum x_i F_i \geq 0$ 。若對偶 $Y \geq 0$ 且 $\text{tr}(F_i Y) + c_i = 0$ ，弱對偶性給 $c \cdot x \leq \text{tr}(F_0 Y)$ 。浮點殘差 $\epsilon_i = \text{tr}(F_i Y) + c_i$ 可用 $0 \leq x_i \leq 1$ 補償，得到上界 $\text{tr}(F_0 Y) + \sum \max(0, \epsilon_i)$ 。此式仍要求 Y 半正定，不能只修正等式殘差而忽略負特徵值。原文稱變數negative是筆誤，應為nonnegative。本導讀轉述作者的驗證，沒有重新執行求解器或獨立審核完整數值證書。

6551已驗證，13087尚未驗證

Theorem 19使用 $2+16$ 分割，報告 $A(18, 4) \leq 6551.93$ 且誤差項小於 10^{-16} ，利用碼大小整數便得 ≤ 6551 。另一組較少限制給6551.98，也跨過相同整數門檻。對 $A(19, 4)$ ， $9+10$ 分割的求解值約13087.5，但保守誤差估計高達215.7376，相加13303.2376，無法改善原文比較上界13104。因此不能把13087寫成本文已證定理；軟體正常結束或作者相信數值正確，都不能取代所需認證。

方法關係、延伸與來源

作者證明四點SDP可推出 R_s 的PSD限制，但是否也包含 R'_s 限制在原文未解決；不能由單一參數的改善推論普遍支配。 m 分區可用各局部代數張量積推廣，但平衡分區變數量約 $O((n/m)^{(3m)})$ ，成本迅速增加。常重量、非二元碼與其他association schemes是後續方向。來源：Pin-Chieh Tseng、Ching-Yi Lai、Wei-Hsuan Yu，Semidefinite programming bounds for binary codes from a split Terwilliger algebra，arXiv:2203.06568v4 (2023)；相關ISIT2022會議版本。

避開原點的超平面覆蓋：穩定性與精確最小值

arXiv:2306.07574v1 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題：每個非零頂點都蓋k次

超立方體 $Q_n = \{0,1\}^n$ 有 2^n 個頂點。選一批不經原點的超平面，使每個其他頂點至少被覆蓋k次，最少要幾個？記答案為 $f(n,k)$ 。這裡允許平面重複，應視為多重集合；同一平面使用兩次便貢獻兩次覆蓋。本文研究接近最優的平面長什麼樣，並把結構資訊用於精確覆蓋。

加權法先給通用下界

對具有t個1的非零頂點x，給權重 $w(x) = 1/[t \cdot C(n,t)]$ 。所有非零頂點的總權重為 $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ 。Clifton–Huang證明每個避開原點的平面所含頂點總權重至多1，所以k重覆蓋至少要 $\text{ceil}(kH_n)$ 個平面。這把幾何覆蓋轉成一個簡潔的分數計數下界。

第一個主結果：完全刻畫滿權重平面

把平面正規化成 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 1$ 。來源證明權重恰為1，當且僅當每個 c_i 都是不大於1的整數，且 $\sum c_i \geq 1$ 。負係數可以出現，例如 $n=3$ 時 $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ 仍有滿權重。條件不是全部係數都等於0或1，這點對完整列舉最有效率的平面很重要。

滿權重平面的數量可以直接算出

令 $d_i = 1 - c_i$ ，則 d_i 是非負整數且 $\sum d_i \leq n - 1$ 。由隔板法，滿權重平面共有 $C(2n-1, n)$ 個。 $n=6$ 時只有462個候選；與從63個非零頂點任選6點猜平面的龐大空間相比，縮減非常明顯。這種先證結構再做整數規劃的策略，是本文計算部分能有效推進的原因。

穩定性：不滿權重就至少損失1/n

來源Theorem 1.3進一步證明，不是滿權重的平面，其權重至多 $1 - 1/n$ ，而且缺口可達。換言之，不存在權重任意貼近1的非最優平面。這種離散缺口比單純上界1提供更多資訊：若整個覆蓋幾乎達到下界，便只能容許極少數次使用非滿權重平面。

避開原點的超平面覆蓋：穩定性與精確最小值

arXiv:2306.07574v1 (2023) | 兩頁中文導讀

證明工具：用排列鏈記錄權重

每個頂點可對應集合，隨機排列產生從空集合到全集的鏈。加權平面截面可透過排列中部分和的行為來計數。作者區分有貢獻、無貢獻與重複的排列，證明非極值平面至少有 $(n-1)!$ 個排列造成缺損，除以 $n!$ 便得到 $1/n$ 。這延續LYM型方法，但需要精細辨認平面係數的結構。

六維的精確結果與例外剩餘類

$H_6=49/20$ 。來源得到： $k \geq 65$ 且 k 不與2或11模20同餘時， $f(6,k)=\text{ceil}(49k/20)$ 。關鍵基礎構造使用49個平面，將63個非零頂點各蓋20次；再藉加入此覆蓋的次可加性，從有限基例延伸至無窮 k 。兩個例外剩餘類不能省略，也不能說所有六維參數已完全解決。

附錄構造可逐點精確驗證

導讀檢查來源附錄列出的49個整數係數平面：各平面皆避開原點，係數不大於1且總和至少1；逐一代入63個非零0-1頂點，每點覆蓋次數均為20。驗證使用整數等式，無浮點容差。這同時確認 $49=20H_6$ ，整個構造確實達到分數權重下界，並提供後續覆蓋拼接的可靠基塊。

缺口還能使整數下界增加1

令 $\delta=\text{ceil}(kH_n)-kH_n$ 。來源Theorem 4.1指出，若 $0<\delta<1/[n \cdot C(n-1, \text{floor}(n/2))]$ ，原下界還需增加1。思路是總剩餘權重太小，無法容納任何非滿權重平面的缺損或任何頂點多蓋一次的最小權重。配合 H_n 分母的算術性質，可在每個足夠大的維度，為無窮多個 k 改進舊下界。

研究意義與後續方向

本篇示範穩定性如何同時服務理論與計算：刻畫極值物件、量化離極值的缺口、縮小整數規劃候選，最後推到精確構造與更強下界。後續可研究更廣的接近滿權重平面，以及尚未決定的六維參數。來源：Das、Djaljapayan、Lin、Yu，arXiv:2306.07574v1（2023年6月），15頁。

用小圖樣描述異質網路：graphlets與軌道

arXiv:2304.14268v3 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題：網路不只是有沒有連線

社會、生物及知識網路中，節點可能有不同類別，邊也可能有類型或方向。若忽略這些資訊，相同的拓撲圖樣可能代表不同關係。本文建立異質graphlets與節點軌道的列舉、辨識及計數流程，並介紹GEOMINE工具，目標是用局部小圖樣把複雜網路轉成可比較的特徵。

graphlet是小型誘導子圖

取少數節點後，保留原網路在這些節點之間的所有邊，所得就是誘導子圖；不能任意刪邊來湊出想要的圖樣。通常只列連通的小圖樣，按同構歸類。異質版本進一步要求同構保留節點顏色、邊類型及方向，所以同一個無色圖形可能分裂成多個不同類型。

軌道區分同一圖樣中的角色

無色三點路徑的兩端可由自同構交換，屬同一軌道；中間點則是另一軌道。如果兩端顏色不同，保色自同構不能交換它們，原本同一角色就被拆開。軌道因而不是手動命名的社會角色，而是由圖形自同構群精確決定的等價類。這使特徵具有不依賴節點編號的意義。

用矩陣記錄顏色與連線

作者將節點類型與邊資料編碼成矩陣：對角存節點類型，非對角存邊類型或無邊標記；有向圖則必須保留矩陣的不對稱資訊。節點重新編號對應同時置換行列。實作時需清楚區別「無邊」與合法類型編號，否則可能把不同圖樣誤認為相同，或在讀取時遺失一種顏色。

標準形式消除重新編號造成的重複

對所有允許節點置換形成的矩陣，選字典序最小者作為canonical form。兩個小圖同構，當且僅當具有相同標準形式。若要識別某個根節點的軌道，就固定根的位置，只置換其他節點。圖樣很小時可直接枚舉置換；這也說明其成本隨圖樣大小迅速上升，不宜把方法理解為任意大子圖都能輕鬆處理。

用小圖樣描述異質網路：graphlets與軌道

arXiv:2304.14268v3 (2023) | 兩頁中文導讀

列舉所有圖樣與計數是兩個步驟

列舉階段先產生合法顏色及邊配置，以標準形式去重，並快取對應的圖樣與軌道索引。計數階段在目標網路取小型誘導子圖，查表辨認類型，再把各節點對應的軌道計數累加。分開這兩步，可以重用同一組參數的圖樣字典，而不必每次分析新網路都重新列舉。

輸出：每個節點的一支特徵向量

向量第*i*欄表示節點參與第*i*種graphlet軌道的次數。它同時反映局部連線結構及類型搭配，可再用於節點比較、聚類或後續模型。特徵本身不是因果效應，也不自動保證分類準確率。不同網路比較時需統一圖樣大小、類型定義及方向規則，必要時處理規模造成的計數差異。

來源示例與實際工具定位

文章展示62個節點的海豚網路，以性別資訊引入異質性，也使用10節點、三種節點類型及兩種邊類型的合成例子，說明輸出如何變得更細緻。GEOMINE是作者提供的實作工具；本導讀說明來源中的演算法與介面概念，沒有實際安裝最新版套件或驗證其目前API，亦不宣稱完成獨立效能測試。

數量表與複雜度應審慎解讀

圖樣種類會隨節點數、顏色數、邊類型與方向快速增加。來源不同段落有若干列舉數量及參數不一致，例如900對應的邊類型數在文字與表格不同；本導讀因此不以那些矛盾數字作宣傳。計數效率也受輸入圖密度及子圖大小影響，不能只憑概括描述就當作已有對任意輸入的線性時間保證。

研究價值與可延伸工作

本篇把異質資訊納入圖同構及自同構軌道，提供可重複使用的局部描述語言。後續可研究更好的同構標準化、快取策略、稀疏網路計數，以及有統計基準的特徵比較。來源：Cleveland、Lee、Tsai、Yu、Lee，arXiv:2304.14268v3（2023年6月），16頁；前兩位為共同第一作者。

小網格比的三角形複數球面設計

arXiv:1907.13493v3 (2020) | 兩頁中文導讀

研究問題：精確平均與均勻分布

本文研究如何在複數單位球面 $\Omega_d = \{z \in \mathbb{C}^d : \|z\| = 1\}$ 上，選擇有限個等權重節點，使低次多項式的節點平均恰等於球面積分，同時避免節點過度聚集或留下大空洞。 Ω_d 的實維度是 $2d-1$ ，因此 Ω_2 對應 S^3 而非 S^2 。研究將代數的矩精確性、節點數成本與幾何均勻度放在同一框架，但三者不能互相取代：很小的矩殘差，不代表分離距離或覆蓋品質一定良好。

三角形與方形設計

以 z 與其共軛的雙次數 (k, l) 描述複數球面調和多項式。三角形 t -design要求所有 $k+l \leq t$ 的成分精確；方形 t -design要求 $0 \leq k, l \leq t$ ，故三角形 $2t$ 蘊含方形 t ，方形 t 再蘊含三角形 t 。這裡的球面設計不能直接等同於複射影設計：射影條件只看相位不變的 $k=l$ 成分，任意選代表向量未必滿足球面一階矩。標準正交基雖是射影 1 -design，其向量總和非零，便不是方形 1 -design；原文Remark3.2的等同敘述需補相位條件。

實球面提供直接橋梁

映射 $\phi(x)_j = x_{(2j-1)} + i x_{(2j)}$ 是 $S^{(2d-1)}$ 到 Ω_d 的雙射，保留範數與 $\text{Re} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = x \cdot y$ 。實多項式與 z 、共軛 $\bar{z}$ 的總次數多項式相互對應，均勻測度也一致，因此實球面 t -design可直接轉為三角形複數 t -design。這是等距座標改寫，不是降維投影。本文使用 $\arccos \text{Re} \langle z, w \rangle$ 的球面測地距離；若改成 $\arccos | \langle z, w \rangle |$ ，就變成另一個射影幾何問題。

幾何品質的量化

分離距離 δ 是兩個不同節點的最小距離；覆蓋半徑 h 是球面任一點到最近節點距離的最大值；mesh ratio為 $\rho = 2h/\delta$ 。 δ 控制擁擠， h 控制空洞； ρ 沿節點數增加仍一致有界時稱準均勻。 ϕ 保留 δ 、 h 與 ρ 。設計條件本身不保證良好分離：把一組設計微小旋轉，再與原組取不重合的聯集，平均仍精確，卻會有任意接近的節點。覆蓋最大化範圍必須是 Ω_d ，原文部分公式寫成 $\mathbb{C}^d$ 需按定義修正。

存在性與證明思路

Theorem3.4指出，固定 d 後存在 C_d ，使每個 $N \geq C_d t^{(2d-1)}$ 都有三角形 t -design，且節點數最佳階數為 $t^{(2d-1)}$ 。證明把非恆定矩集合表示成有限維向量，使用直徑 $O(N^{-(1/(2d-1))})$ 的等面積分割與Marcinkiewicz–Zygmund取樣估計，再讓節點沿正規化梯度流移動。邊界上平均的正增量超過初始取樣誤差，Brouwer degree給出矩向量為零的內部點。這不等於求出最小常數，也不是數值演算法的收斂保證。

小網格比的三角形複數球面設計

arXiv:1907.13493v3 (2020) | 兩頁中文導讀

數值建構：先找精確矩，再改善幾何

利用正調和係數的zonal多項式，定義 $V = N^{(-2)} \sum_i \sum_j \phi_t(x_i \cdot x_j)$ 。加法公式把 V 改寫成正加權的矩平方和，所以精確算術下 $V \geq 0$ ，且 $V = 0$ 當且僅當是 t -design。理想問題為在 $V = 0$ 限制下最小化 ρ 。作者採兩階段策略：先最小化 V 找近似可行點，若仍有自由度再改善 ρ ，並用不同初始點處理局部極小值。 ρ 的max-min結構不光滑；正殘差局部極小值不是設計，孤立可行解也不保證全局最佳幾何。

節點數與對稱性的取捨

N 個 $S^{(2d-1)}$ 節點有 $N(2d-1)$ 個變數，扣除全體旋轉 $d(2d-1)$ 個自由度後，一般位置下剩 $(2d-1)(N-d)$ 。令此數至少等於非恆定矩條件數 H ，可得啟發式 $N = \text{ceil}(H/(2d-1)+d)$ ，其中 $H = \dim \Pi_t(S^{(2d-1)}) - 1$ 。變數計數不能證明解存在或方程獨立。使用 $X = Y \cup (-Y)$ 時，奇次矩自動抵消；奇數 t 的對稱建構約減半變數與約束，但主導節點階數仍是 $t^{(2d-1)}$ 。

可檢查的小例子與數值結果

Ω_2 的 $\pm e_1$ 、 $\pm ie_1$ 、 $\pm e_2$ 、 $\pm ie_2$ 八點對應 S^3 的cross-polytope，是三角形3-design； $\delta = \pi/2$ 、 $h = \pi/3$ 、 $\rho = 4/3$ 。Table 6.1另列 $t=21$ 、 $N=1184$ 、 $\rho \approx 1.9759$ ，以及 $t=31$ 、 $N=3642$ 、 $\rho \approx 2.0013$ 。Table 6.2在 Ω_3 列 $t=11$ 、 $N=1208$ 、 $\rho \approx 2.3071$ 。原文正文與Figure 6.2對1184點使用23次標示，但表格與Figure 6.1列21；本導讀依表格並揭露差異。約 $10^{(-16)}$ 的負 V 是浮點誤差尺度，不能當作負能量或嚴格設計認證。

積分示範與適用範圍

在 Ω_2 取 $f(z) = 1/\|z - z_0\|^2$ ， $z_0 = (1+i, 1+i)$ ，精確正規化積分為 $1/4$ 。可由 R^4 中外部奇點的Newton核與調和平均值理解。Figure 6.3報告較高 t 時約 $10^{(-9)}$ – $10^{(-12)}$ 的積分誤差；這是光滑特定函數的實驗，不是所有函數的保證。若 p_t 是 t 次多項式近似，設計的誤差 $\leq 2\|f - p_t\|_\infty$ 。Sobolev H^s 、 $s > m/2$ 且 $m=2d-1$ 的相應理論，可給適當設計 $O(N^{(-s/m)})$ 的誤差階數，必須保留函數空間與誤差定義的前提。

貢獻、限制與來源

核心貢獻是以實複等距對應連接精確求積與幾何品質，提供最佳節點階數的存在性理論及 Ω_2 到 Ω_6 的數值例子。尚未解決最小節點常數、所有 t 的啟發式點數可行性或全局最小mesh ratio；有限數值表格也未提供區間算術或精確代數認證。來源：Yu Guang Wang、Robert S. Womersley、Hau-Tieng Wu、Wei-Hsuan Yu，Numerical computation of triangular complex spherical designs with small mesh ratio，arXiv:1907.13493v3 (2020)。本導讀依此公開版本，與ConceFT應用論文分開處理。

舌下靜脈嚴重程度的機器學習分類

Published article (2022), PMC9663216 | 兩頁中文導讀

研究任務與意義

本文希望用手機舌下靜脈照片，協助將外觀分為輕度與重度，並比較不同特徵擷取方式與機器學習分類器。研究背景是中醫的血瘀視覺判讀，但模型標籤來自醫師對影像的評分；因此它學習的是影像分級，不是獨立診斷癌症、心血管疾病或其他內在病因。其貢獻在於建立可比較的計算流程，探索降維是否能兼顧分類表現與訓練速度。

資料與標註

100位患者來自臺北慈濟醫院2017年4月至2022年3月的資料，納入年齡20–80歲，女性87位、男性13位，主要包含癌症與乾燥症患者。三位資深醫師各按V1到V4給1–4分：V1隱約可見、V2明顯、V3分支、V4隆起或串珠狀；平均 ≤ 2 為mild，平均 > 2 為severe，各50張。兩兩Cohen κ 為0.845、0.930、0.879，Fleiss κ 為0.885，顯示評分一致性高，但不等於生物學真值或其他疾病診斷已驗證。

影像前處理與特徵維度

手機使用強制閃光並保存RGB照片，由醫師人工裁出ROI、移除牙齒與鬍鬚等干擾，再置中、縮放 128×128 、min-max正規化到[0,1]。展平後有49,152個像素特徵，遠多於樣本數。人工ROI是流程的一部分，不能把結果描述為任意手機照片直接輸入就能達同樣表現。原文的裁切與色彩比較是研究中的前處理觀察，尚非外部族群的性能保證。

三種表示方式

Original直接使用像素；PCA+SIR先以不看標籤的PCA壓縮，再用標籤分組的條件平均估計有效投影方向；CNN則由卷積、pooling與全連接層擷取1,000維中間特徵，交給Ridge或SVM等分類器。PCA保留大變異方向，主成分不相關但未必獨立；SIR估計線性投影方向，可用來描述非線性反應關係。Ridge-CNN是混合模型，不是單純以CNN最後輸出完成分類。

模型與交叉驗證

比較linear與RBF SVM、linear model、Ridge、KNN ($k=5$)、decision tree及random forest，使用當時scikit-learn預設參數。五折驗證每回80張訓練、20張測試；CNN再把80張分為64訓練、16驗證，五折程序重複四次。原文說CNN訓練40次迭代。正式重現時，PCA、SIR、CNN等擬合步驟應限制於訓練fold，尤其SIR不能看到測試標籤；原文未完整展示全部pipeline，故不假稱已逐項驗證或已證實資訊洩漏。

舌下靜脈嚴重程度的機器學習分類

Published article (2022), PMC9663216 | 兩頁中文導讀

分類結果與特徵的作用

原始像素下，linear model、Ridge、linear SVM的平均accuracy約84.5%–84.8%，高於KNN76.2%、random forest75.5%及decision tree67.7%。PCA+SIR使各方法集中於約83.5%–84.5%；CNN特徵配Ridge達87.5%，配linear SVM為86.2%。CNN並非改善所有模型，例如linear model降至83.5%。這些是原文報告值，沒有在本導讀重新訓練，也不證明任何模型在所有資料或調參下最優。

Ridge-CNN的取舍

Ridge-CNN平均accuracy87.5%（95% CI83.8–91.2）、sensitivity90.5%、specificity84.5%、PPV86.5%、NPV91.3%。相較Ridge-original，敏感度提升11.0個百分點，但特異度下降5.5個百分點，accuracy提升2.8個百分點。模型較少漏判重度，也較多把輕度判重度。這是重複驗證平均，不應由百分比捏造單一100人的整數混淆矩陣；臨床用途還需衡量兩種錯誤的代價。

與醫師比較及訓練時間

另兩位比較醫師不同於三位標註者，平均accuracy90.0%；與Ridge-CNN比較的原文t-test $p=0.26110$ 。未達顯著差異不是等效或非劣性證明，且重複fold與共用影像的相依性需要適當處理。Table2報告Ridge-original訓練1.1秒、PCA+SIR0.004秒、CNN0.027秒，後者約41倍加速；這是原文量測，並非手機診斷延遲。硬體與CNN計時範圍未充分交代，不能保證任意設備重現相同比例。

外推與研究限制

資料只有單一中心100例，女性占87%，疾病組成也集中，並依賴人工ROI與專家參照標籤。50/50的平衡資料下PPV不等於一般族群PPV：若假設敏感度0.905、特異度0.845不變，重度比例只有10%，Bayes公式給PPV約39.3%。此為教學假設，非新實測。研究尚未提供多中心前瞻驗證、四級自動分級或改善患者結果的證據，不能把原型當作已驗證的醫師替代工具。

後續方向與來源

可進一步以不同醫院、照明、疾病與性別分層進行獨立測試，公開完整模型與切分流程，並評估自動ROI、臨床決策影響及事先設定界值的醫師比較。來源：Ping-Hsun Lu、Chih-Chi Chiang、Wei-Hsuan Yu、Min-Chien Yu、Feng-Nan Hwang，Machine Learning-Based Technique for the Severity Classification of Sublingual Varices according to Traditional Chinese Medicine，Computational and Mathematical Methods in Medicine（2022），3545712，DOI:10.1155/2022/3545712，PMC9663216。

複數球面碼：從相位到半正定限制

arXiv:2204.04108v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：複數內積多出的相位如何處理？

複數單位球面 Ω_d 位於 C^d ，有限點集的內積可以是複數，其共軛也會出現。不同於只看內積絕對值的射影碼，本文保留完整複數內積。若直接改看 $R^d(2d)$ 的實內積，就只保留實部、丟掉相位。作者因此建立直接適用於複數球面碼的三點半正定規劃框架。

從兩點線性規劃走向三點限制

兩點LP限制統計每種內積出現的次數，但無法完整表達三個點共同存在的條件。三點Gram矩陣必須為Hermitian半正定，內積同時受排列與共軛對稱控制。作者以三點分布為變數，加上由酉群調和分析導出的矩陣正性，讓「局部彼此相容」成為比單純兩點計數更強的限制。

複數調和分析提供正定核

實球面常用Gegenbauer多項式，複數球面則按雙次數 (k,l) 分解調和空間。固定一個基準向量後，考慮酉群穩定子的作用；某些不可約成分具有重數，因此自然出現矩陣值核。它們由評值矩陣乘其共軛轉置構成，對有限點集加總必半正定。這是將群對稱轉為SDP限制的來源。

三點分布的正規化與總點數

來源將三點計數除以集合大小，對角型態 $x_{(1,1,1)}=1$ ，並由1加上非對角二點分布恢復點數。可行型態必滿足三點Gram半正定、排列對稱及共軛相容。求使總點數最大的可行分布，便得到上界；如果找到對偶非負證書，可把數值線索轉為可驗證的不等式。

一個可明確證明的複數兩距離結果

對 $d \geq 5$ ，若不同點內積只能為 $(d-1+i)/d$ 及其共軛，來源Theorem 4.3以三次核推出 $|X| < 6$ ，故至多5點。顯式分式為 $(18d^3 - 48d^2 + 24d + 4)/(3d^3 - 6d^2 - 6d + 8)$ ，在此範圍小於6。這是指定兩個複數內積的結果，不能解讀成所有複數兩距離集合都只有5點。

複數球面碼：從相位到半正定限制

arXiv:2204.04108v1 (2022) | 兩頁中文導讀

關聯方案不存在性的應用

某些關聯方案參數若可實現，其特徵空間嵌入會形成帶指定內積的複數球面碼。來源考察889點與945點的兩組候選，分別落在複數維度63與59，利用調和多項式的加總正性導出負值矛盾。這部分實際使用兩點線性規劃就足夠，不能把文中所有不存在性都說成必須靠新三點SDP。

準不偏Hadamard矩陣如何連到球面碼？

若多個Hadamard矩陣兩兩乘積經縮放後是指定權重的秤重矩陣，把各行正規化便得到實球面碼。相異行的內積受到0與 $\pm 1/\sqrt{l}$ 限制，其中 l 由矩陣參數決定。因此矩陣家族的最大個數，可以轉成球面點數上界再除以每個矩陣的行數。這是離散矩陣問題通向幾何最佳化的橋梁。

應用表格需區分解析界與數值界

來源參數(16,4,64)的家族上界由既有35改善至15；另一組(24,4,144)，LP給27，數值SDP得到25。每列改善程度不同，不能一概宣稱全部參數皆大幅提升。數值最佳化值與解析對偶證書也應分開：本導讀把表格中的計算結果按來源報告，不冒稱重新跑完所有SDP或完成精確證書化。

一個低次多項式界的典型形式

對內積限制0、 $\pm \alpha$ ，可取多項式 $F(t)=t^2(t^2-\alpha^2)$ 。來源在 $(d+4)\alpha^2 \leq 6$ 及 $(d+2)\alpha^2 < 3$ 等條件下，取得 $d(d+2)(1-\alpha^2)/(3-(d+2)\alpha^2)$ 形式的點數界。方法重點是展開係數的符號與允許內積上的消失性，不能略去條件後把分式當作任意球面碼的上界。

研究價值與閱讀範圍

本篇建立保留複數相位的半正定工具，同時展示對關聯方案與特殊矩陣的用途。導讀採核的正定來源與可核查結論，不重抄來源顯式核中需另外檢查的相位係數。來源：Kao、Suda、Yu，arXiv:2204.04108v1（2022年），17頁。所有比較與數值狀態均依此版本，不當作截至今日的完整最佳界列表。

四點半正定方法：等角直線的上界與唯一性

arXiv:2203.05828v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：相同角度的直線能放多少條？

在 R^d 中，取通過原點且兩兩夾角相同的直線。每條選單位方向後，不同向量內積為 $\pm\alpha$ ；固定 α 的最大條數記 $N_\alpha(d)$ 。本文利用四點之間的相容性改進上界，並從達界情況反推出構型維度與唯一性。固定角度的問題不同於容許所有角度的最大條數 $N(d)$ 。

從三點上界推進到四點

對奇整數 $a \geq 3$ 、 $\alpha = 1/a$ ，既有三點方法給 $N_{(1/a)}(d) \leq M(a) = (a^2 - 1)(a^2 - 2)/2$ ，適用到 $D_3(a) = 3a^2 - 16$ 。本文把範圍擴大到 $\text{floor}(D_4(a))$ ， D_4 是Theorem 4.1明列四次多項式 g_a 的最大實根，漸近為 $3a^2 + (12/\sqrt{5})a - 948/25 + O(1/a)$ 。這增加了隨 a 成長的適用維度區間。

小參數顯示改進幅度

$a=3$ 時，28條上界從維度11推進到14； $a=5$ 時，276條從59推進到64； $a=7$ 時，1128條從131推進到144。整數維度必須取實根下整數，不能四捨五入。來源也說明既有數值SDP在65、145等端點仍更強，因此本篇解析公式的範圍不能與那些數值結果混為一談。

有限內積讓矩陣不隨截斷膨脹

一般三點SDP以單項式向量形成矩陣，大小隨截斷次數增加。對僅有 s 種內積的集合，作者改用有限內積值上的評值基底。插值使任意指定值能由多項式表達，所以限制可壓成 $(s+1) \times (s+1)$ 矩陣；當舊截斷至少 s 時，兩種表達有相同限制力。此想法可推廣到更高點數。

幾何核心：投影到基準向量的正交補

固定 m 個獨立基準向量，Gram矩陣為 G 。其他向量的內積資料 u 、 v 、 t 投影後，剩餘內積分子為 $t - u^T G^{-1} v$ ，長度平方為 $1 - u^T G^{-1} u$ 等。以此建多變量Gegenbauer核，按 $(m+2)$ 點Gram型態加總得到半正定限制。四點情形是 $m=2$ ，不是把所有向量放進四維。

四點半正定方法：等角直線的上界與唯一性

arXiv:2203.05828v1 (2022) | 兩頁中文導讀

換號等價大幅減少局部型態

直線方向可換號，Gram矩陣因此變為 $\Lambda G \Lambda$ ， Λ 對角為 ± 1 ，直線集合本身不變。作者合併換號等價型態，藉核的奇偶性保留半正定性。三點可用兩類計數，四點再合併排列後只需三種計數 z_1 、 z_2 、 z_3 ，滿足 $z_1 + 6z_2 + z_3 = N(N-1)(N-2)(N-3)$ 。這讓解析證書成為可處理的小問題。

小型對偶證書推出明確上界

證明只需 $k=0$ 的 3×3 限制與 $k=3$ 的 2×2 限制。作者選半正定 F 及非負 f_1 、 f_2 ，使兩個矩陣配對之和恰為 $N(N-1)(M(a)-N)$ 。左側非負，故 $N \leq M(a)$ 。 F 的一維核取自達界構造規律，再由係數匹配求證書；控制其二階主子式非負的條件正是四次多項式 g_a 。

取等號迫使降維與規則組合結構

若 $d < D_4(a)$ 且 $N=M(a)$ ，非負配對皆須為零。秩2對偶 F 迫使配對的 3×3 矩陣只剩秩1，進而固定任意兩條線所見的局部型態數。選基準線、調整方向、投影並正規化後，得到強正則圖的球面嵌入。其Gram秩為 a^2-3 ，所以原本直線實際位於 a^2-2 維子空間。

唯一性必須保留角度與維度條件

$a=3$ 時得到強正則圖參數 $(27,16,10,8)$ ， $a=5$ 時為 $(275,162,105,81)$ 。結合這些圖的已知唯一性，來源證明角度參數 $1/3$ 且 $7 \leq d \leq 14$ 的28線構造唯一，以及角度參數 $1/5$ 且 $23 \leq d \leq 64$ 的276線構造唯一。唯一性忽略正交變換與方向換號；不代表所有角度、所有維度皆唯一。

研究意義與可延伸方向

本篇將數值最佳化背後的規律整理成適用無窮參數的解析證書，並展示上界取等號能帶出剛性結構。後續可研究更高點限制、其他少距離集合及強正則圖不存在性。上界公式本身不保證每個 a 都有達界構造。來源：Wei-Jiun Kao、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2203.05828v1（2022年3月），28頁。

肥胖研究中的穴位組合：關聯規則分析

Published article (2022), PMC8947926 | 兩頁中文導讀

研究問題與資料單位

本文以 Apriori 關聯規則，研究肥胖相關針灸試驗中哪些穴位常一起出現。資料來自先前統合分析的11項隨機假針對照試驗，共643名參與者，涵蓋電針與耳針。本次分析的一筆 transaction 是「一項試驗的穴位方案」，所以 support 的分母是11，不是643；沒有新收案，也沒有患者層級的療效模型。作者希望從較可追溯的試驗方案，找出值得後續檢驗的候選核心組合。

資料選擇與品質

納入成人過重或單純性肥胖、以標準電針或耳針對比假針的試驗，排除次發性肥胖及其他不符條件介入。Table1 各試驗的BMI入選門檻並不相同，不能把它們當成本導讀提出的現行診斷標準。原文報告平均 modified Jadad 分數5.27，皆為單盲，但只有3項說明退出原因；平均療程35天，只有1項有仔細追蹤。高品質分數不會自動消除偏差或證明長期效果。

命名與頻率的透明重算

原文報告23個穴位標籤，Table1 同時有 RN12/REN12、RN9/REN9、RN4/REN4。合併三組別名、去除 LI 4 空白後，本導讀重算為20個穴位概念。Extra12、TF4 各出現8次；LI4、ST36、ST44、ST25、CO4 各5次；LI11 為4次；SP6、CO18 各3次。每方案平均6.18個穴位。這些是明確標示的表格重算；較常用不等於較有效，命名標準化也未改變核心三穴位的共現結果。

三個指標各回答什麼

support(A) 是包含 A 全部穴位的試驗比例；規則 $A \rightarrow B$ 的 support 是包含 $A \cup B$ 的比例。
 $\text{confidence}(A \rightarrow B) = P(B|A)$ ，即有 A 時也有 B 的比例； $\text{lift} = \text{confidence}/P(B)$ ，把後件原本的常見程度納入比較。獨立時 $\text{lift}=1$ ，大於1表示正共現。箭頭沒有因果或時間意義。原文公式與某句條件機率文字方向不一致，本導讀依公式解釋；lift 大於2的經驗門檻也不是統計顯著性檢定。

Apriori 如何縮減搜尋

若 A 是 B 的子集合，support(B) 不會大於 support(A)，因此不常見集合的所有超集合都能剪枝。原文採30%的support門檻，11筆方案至少出現4次才達標，並以80%的confidence篩選；表格保留恰為0.8的規則，本導讀明確採含端點的解讀。標準化後有8個單穴位達support門檻，再由單點擴展成二點、三點集合。原文報告1118條規則，但未充分交代計數細節，本導讀沒有宣稱重現該總數。

肥胖研究中的穴位組合：關聯規則分析

Published article (2022), PMC8947926 | 兩頁中文導讀

核心三穴位的完整算例

LI4、ST36、ST44 出現在相同5項試驗，因此 {LI4,ST36}→{ST44} 的 support=5/11、confidence=1、lift=1/(5/11)=2.2。其餘兩個「二推一」方向相同，但它們是同一共現模式的不同表達，不是三個獨立療效證據。Extra12 與 TF4 在相同8項試驗出現，confidence也為1，lift卻只有11/8=1.375，說明最高頻率與最高lift是不同概念。

方向性與表格核對

LI4出現5次，LI11出現4次且都與LI4同用，所以 LI4→LI11 的confidence為0.8，反向為1，兩者lift皆2.2。ST25→Extra12 的support=4/11、confidence=0.8、lift=1.1，其後件背景率應為8/11，而非Table2列出的0.909090。另有LI4→LI11背景率欄不一致、最後一列ST11與Table1的LI11不同等問題。導讀保留原文與重算的區分，不假稱已有作者更正。

關聯不能直接當作療效

這次輸入只有穴位集合，沒有把BMI變化、體重或對照組效果量放入規則。即使來源是RCT，也不能由方案共現推論某三穴位組合有因果效果或協同作用。原文引用先前統合分析對BMI、體脂量、腰圍、臀圍有顯著差異，對體重則無顯著組間差異；這些pooled結果不能專屬歸因於核心三穴位。代謝、發炎、食慾與脂肪組織機制的討論，多是其他研究的間接證據，本關聯分析未測量它們。

小資料與後續檢驗

11筆交易中的完美規則可能不穩定：若增加一個有LI4但沒有ST36的假設方案，confidence就從1降到5/6。相同方案重複、不同針法群聚、語言與出版選擇、短療程等也限制外推。Table1前三項方案相同，但不能僅由此宣稱患者重複。下一步應以新資料檢查穩定性，再以事先指定結果與對照的隨機試驗比較核心組合與替代方案，控制針法、劑量及共同介入。

貢獻與來源

本文將試驗選穴模式轉為可計算、可檢查的關聯規則，提出LI4、ST36、ST44作為候選核心組合；其價值是產生更具體的研究假設，沒有取代直接療效比較。來源：Ping-Hsun Lu、Yu-Yang Chen、Fu-Ming Tsai、Yuan-Ling Liao、Hui-Fen Huang、Wei-Hsuan Yu、Chan-Yen Kuo，Combined Acupoints for the Treatment of Patients with Obesity: An Association Rule Analysis，eCAM（2022），7252213，DOI:10.1155/2022/7252213，PMC8947926。

Lemmens–Seidel 猜想與禁子圖

arXiv:2003.07511v1 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與完整答案

本文研究固定共同角度 $\arccos(1/5)$ 的等角直線。取各線的單位代表向量，任兩不同向量的內積為 $\pm 1/5$ 。令 $N_{1/5}(r)$ 為 R^r 中此類直線的最大數，作者完整證明1973年的 Lemmens–Seidel 猜想： $23 \leq r \leq 185$ 時 $N_{1/5}(r) = 276$ ； $r \geq 185$ 時 $N_{1/5}(r) = \lfloor (3r-3)/2 \rfloor$ 。兩式在185維相接。這是固定角度的最大值，與允許任意角度的最大線數不同，也比「某配置已不能擴充」的飽和性更強。

幾何轉成譜與秩

Gram 矩陣可寫成 $G = I + S/5$ ，其中 Seidel 矩陣 S 的對角為0、非對角為 ± 1 。正半定條件等價於 $\lambda_{\min}(S) \geq -5$ ，配置張成維數則是 $\text{rank}(S+5I)$ 。 $n > r$ 時 G 必奇異，故最小特徵值恰為 -5 。主定理敘述為： $n \geq 277$ 時 $\text{rank}(S+5I) \geq \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$ 。完整證明對所有可能的大系統分支實際提供較強的 $\text{rank} \geq 2n/3 + 1$ ；剩餘分支直接證明 $n \leq 276$ 。配合既有建構，就得到猜想中的精確最大值。

切換與真正剩下的情形

若以內積 $-1/5$ 表示圖的邊， $S = J - I - 2A$ 。反轉部分向量相當於切換圖中某個頂點集合與補集間的邊非邊，譜與秩不變。 $\alpha([S])$ 、 $\omega([S])$ 是整個切換類的最大獨立數與最大團數。交錯定理排除 K_7 ，故 $\omega \leq 6$ ； $\omega = 2, 3, 5, 6$ 的情形已有足夠秩界。本文的新工具主要封住 $\omega = 4$ ，並逐步將可能反例壓到 $\alpha \leq 28$ 。

禁子圖提供可計算的局部障礙

若一個誘導子圖的最小 Seidel 特徵值低於 -5 ，則包含它的圖也不合法。作者使用這種極小禁子圖族 F_{-5} 中的一批成員，而非列舉全族。例如星圖 $K_{1,r}$ 加 s 個孤點及 t 條獨立邊，當 $r \geq 2$ 、 $s+t \geq 1$ 時，合法的充要條件為 $(r-4)(s+4t-4) \leq 36$ 。 $K_{1,5}$ 加41個孤點使左側為37，因此被排除。此類簡單式來自 equitable quotient 與行列式。

從局部結構削減反例

誘導子圖 H 若有 adjacency 譜半徑大於2，完全不鄰接 H 的遠方 $R(H)$ 就有譜半徑小於2，受到森林結構限制。利用這一點，作者先處理低最大度數、大獨立集及三角形自由圖。對 $\omega = 4$ 的剩餘情形，再由大鄰域迫使小型禁子圖出現，先證 $\alpha \geq 39$ 已有秩界，接著改善到 $\alpha \geq 29$ 。因此只需證明 $\omega = 4$ 、 $\alpha \leq 28$ 的圖不可能超過276點。

四點基底與七個柱

選一個 K_4 基底，按外點在基底的鄰接集合分柱，並利用切換辨認互補集合。外點分成四個一點柱與三個二點柱。空鄰接柱不存在，否則可切換成 K_5 。用 $S+5I$ 作為 Gram，將向量拆成基底投影與正交剩餘部分後，同一點柱的剩餘向量互相正交，平方長度為4；跨柱剩餘內積只有 $-4/3$ 、 $2/3$ 。這使柱的大小可由小型正半定矩陣限制。

19、68、20 三個關鍵數字

若兩個一點柱之間有邊，其餘每個一點柱至多19點。證明把對邊兩端的四種鄰接型計數化成行列式不等式，再利用整數性。另一方面，二點柱切換後與兩條獨立邊不相鄰，其柱圖三角形自由且獨立數 ≤ 26 。禁子圖分析給柱大小 ≤ 68 ；若大小 ≥ 66 ，柱內每條邊兩端的度數和 ≤ 20 。這些都是後續需要同時使用的限制，不能只保留68的點數上界。

gallery 讓不同柱互相制約

一條無共同鄰點的邊，其兩端共同非鄰點所誘導的圖稱為 gallery。在其中選另一條邊，可重新拆成兩個一點柱、一個二點柱和兩個端點。若 gallery 最大度數 ≤ 20 ，作者證明其大小 $\kappa \leq 105$ ；若等號成立，還存在兩端度數都為20的邊。這個等號資訊十分重要，因為它能在重選基底後，把特定二點柱的大小從68降到65。

最終計數如何得到276

若任何基底的一點柱 ≥ 20 ，19界迫使其餘三柱聯集獨立，故 $n \leq 4 + 2 \times 28 + 3 \times 68 = 264$ 。否則所有一點柱 ≤ 19 ，gallery 最大度數 ≤ 20 。若某 gallery 有105點，等號資訊使一個二點柱為65，四個gallery的計數給 $n \leq 4 \times 105/2 + 65 = 275$ ；若全部 ≤ 104 ，同一計數式給 $n \leq 4 \times 104/2 + 68 = 276$ 。這便排除最後的反例分支，完成整個猜想。

意義、數值與閱讀提醒

固定角度最大值在100維與185維均為276，186維為277，200維為298。證明的特色不是搜尋所有配置，而是用譜禁子圖、柱的局部界與gallery的全域計數逐層排除反例。來源：Meng-Yue Cao、Jack H. Koolen、Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，The Lemmens-Seidel conjecture and forbidden subgraphs，Journal of Combinatorial Theory, Series A 185（2022）。本導讀依 arXiv:2003.07511v1（2020年3月17日）全文，未宣稱重新執行原文全部計算。

少距離集合何時必須滿足整數條件？

arXiv:2106.09582v1 (2021) | 兩頁中文導讀

研究問題：連續距離為何出現整數？

有限集合 X 位於 $\mathbb{R}^d$ ，不同點間恰有 s 種距離 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ，稱為 s -distance set。座標可以任取實數，然而點數夠大時，距離之間卻受到整數條件限制。本文探討Larman–Rogers–Seidel定理的多距離推廣，目標是降低觸發算術剛性所需的點數門檻。它研究的是距離參數，不是直接決定所有集合的最大點數。

兩距離的經典現象

若兩種距離 $\alpha < \beta$ ，LRS結論為 $\alpha^2/\beta^2 = (k-1)/k$ ， k 為正整數。原始點數條件是 $|X| > 2d+3$ ，Neumaier改進為 $|X| > 2d+1$ 。受限的是距離平方之比，不是各距離本身必須為整數。例如平方比 $1/2$ 允許距離比 $1/\sqrt{2}$ 。門檻以下仍可能有不符合這個整數形式的構造。

多距離時要檢查哪些量？

對每個 i 定義 $k_i = \prod_{j \neq i} \alpha_j^2 / (\alpha_j^2 - \alpha_i^2)$ 。Nozaki的推廣指出，若 $|X| \geq 2N_0$ ， $N_0 = C(d+s-1, s-1) + C(d+s-2, s-2)$ ，則 k_i 皆為有界整數。 $s=2$ 時，較短距離對應 $\beta^2/(\beta^2 - \alpha^2)$ ，重寫後就是經典平方比。因此這些乘積提供自然的多距離類比。

預印本提出的改進門檻

來源Theorem 1.3主張可改用 $N = C(d+s-1, s-1)$ ，條件為 $|X| \geq 2N$ ，並保留 $|k_i| \leq \text{floor}(1/2 + \sqrt{N^2/(2N-2) + 1/4})$ 。 $s=2$ 時門檻成為 $2d+2$ ，等價於整數點數 $|X| > 2d+1$ 。 $s=3$ 、 $d=4$ 時則由舊門檻40降到30。這是本篇v1提出的主要主張；本導讀下頁另說明詳證需要核對的步驟。

距離多項式把幾何變成矩陣

固定 i ，設 $F_y(x) = \prod_{j \neq i} (\alpha_j^2 - \|x-y\|^2) / (\alpha_j^2 - \alpha_i^2)$ 。在 $x=y$ 時等於 k_i ；其他點上則是距離 α_i 的指示函數。評值矩陣因而為 $M_i = k_i I + A_i$ ，其中 A_i 是距離圖鄰接矩陣。多項式空間限制其秩，整數矩陣的特徵值性質則把這種低秩轉成 k_i 的算術限制。

少距離集合何時必須滿足整數條件？

arXiv:2106.09582v1 (2021) | 兩頁中文導讀

維度估計是改進的關鍵

F_y 通常總次數為 $2(s-1)$ ，但位於由 $x_0 = \sum x_j^2$ 及各座標組成的特殊空間 $W_{(s-1)}$ ，維度上界為 N_0 。作者嘗試扣除普通低次多項式空間 $P_{(s-2)}$ ，其維度為 $C(d+s-2, s-2)$ ，以取得 N 。關鍵不只是減掉數字，而是必須證明相關空間的獨立性確實允許如此扣除。

導數把降次轉成加權矩消失

來源Lemma 2.4 考察 $\sum m_y \|x-y\|^{2(s-1)}$ ：若高次項消失，適當微分可推出若干 $\sum m_y y_1^{\lambda_1} \cdots y_d^{\lambda_d}$ 為零。這把多項式降次與座標矩聯繫起來。作者以逐級歸納嘗試證明所需獨立性，延續少距離集合研究中的多項式方法。完整證明需要同時追蹤次數、微分階數及係數條件。

公開v1有一個需要確認的推導

§ 3 式(5)把線性關係代入 $u \in X$ 時，依 F_y 定義，除 $k_i C_u$ 之外，通常還有 $\sum (y_i \|u-y\| = \alpha_i) C_y$ 。來源接下來的展示式未保留這一鄰點和，因此後續平方和推論不能直接由該式得到。本導讀將Theorem 1.3列為預印本主張，沒有把這段缺少說明的推導視為已獨立驗證的證明。

有限性結論需先忽略相似變換

來源Theorem 4.2 進一步主張，在新點數門檻下只剩有限多種 s 距離集合。這應理解為正規化最大距離，並忽略平移、正交變換與整體縮放後的型態。字面上的座標集合當然無限多。思路是有界整數 k_i 只有有限候選，正規化距離由此受限，再結合有限距離矩陣的可能性。

成果定位與後續問題

$s=2$ 的新主張回到最佳整數性門檻，但並未同時改善所有已知有限性結果； $s \geq 3$ 能否再降門檻則是自然方向。正式演講詳證前，宜核對作者修訂稿及上述鄰點和的處理。來源致謝 Eiichi Bannai 及 NCTS 大學生研究計畫。文獻：Cheng-Jui Yeh、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2106.09582v1（2021年6月），6頁。

少角度對蹠球面設計的上界

arXiv:2007.13999v3 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與精確強度

對蹠集合 $X \subset S^{d-1}$ 滿足 $X = -X$ ，角度集合 $A(X)$ 是不同點的內積，角度數為 s 。強度 t 表示 X 是球面 t -design，但不是 $(t+1)$ -design。對蹠性自動消去所有奇次調和矩，因此精確強度是奇數。本文問：同時具有少量內積值與指定平均性時， X 最多能有幾個點？精確強度是不可省略的假設；最高強度的緊設計常是較強上界的例外。

一般偶數角度上界

經典 Delsarte–Goethals–Seidel 界為 $|X| \leq 2 \operatorname{binom}(d+s-2, s-1)$ ，等號對應 tight spherical $(2s-1)$ -design。作者在 $d \geq 2$ 、 $t \geq 3$ ，且 s 為偶數並滿足 $(t+5)/2 \leq s \leq t+1$ 時，將它改為 $|X| \leq 2 \operatorname{binom}(d+s-2, s-1) - 2h_{t-s+2}$ ，其中 h_k 是 k 次齊次調和空間維數。 $h_0=1$ 、 $h_1=d$ ， $k \geq 2$ 時 $h_k = \operatorname{binom}(d+k-1, k) - \operatorname{binom}(d+k-3, k-2)$ 。例如 $d=3$ 、 $s=4$ 、 $t=3$ 的形式上界由 40 降為 34，並不表示 34 點一定存在。

取一半並建立調和矩陣

從每對相反向量選一點，得到大小 $N=|X|/2$ 的 X 。這一半保留偶次調和條件，但未必零重心。令 H_k 為調和基底在 X 上的求值矩陣， $D_k = H_k H_k^T$ ， $V_k = \operatorname{range}(D_k)$ ，則 $\dim V_k \leq h_k$ 。同奇偶且 $k+l \leq t$ 時，設計條件給 $H_k^T H_l = N \delta_{kl}$ ，故 $D_k D_l = N \delta_{kl} D_k$ 。這些像空間的相依性控制了點數。

扣除一個冗餘的調和空間

偶數 s 時角度為 -1 、 0 、 $\pm \alpha_i$ 。共同奇多項式 $F(z) = z \prod (z^2 - \alpha_i^2) / (1 - \alpha_i^2)$ 在半集合的非對角內積都消失，且 $F(1)=1$ ，因此其 Gegenbauer 展開給 $l = \sum_k \text{奇數 } f_k D_k$ 。精確強度使 $l = t - s + 2$ 的係數 f_l 不等於 $1/N$ ；配合矩陣正交性，可推出 V_l 包含於 V_{s-1} 。秩總和於是能省去 h_l ，再乘二便得主定理。此方法不要求任意半集合都出現全部正負角度。

三角度分支與 ETF

三角度對蹠設計對應 real equiangular tight frame (ETF) 的對蹠補全。若 Φ 有 $n > d$ 個單位向量，Welch 界為 $\operatorname{coherence}^2 \geq (n-d)/(d(n-1))$ ，取等號就是 ETF。一般上界定理的參數區間不涵蓋 $s=3$ 、 $t=3$ ，所以作者改用角度倒數的奇整數限制。向量數 n 與對蹠點數 $|X|=2n$ 必須區分；最大 Gerzon ETF 的補全具有強度五，不屬強度恰三的分枝。

少角度對蹠球面設計的上界

arXiv:2007.13999v3 (2020) | 兩頁中文導讀

ETF 的兩端空隙

對 $d \geq 5$ 、 $n > d+1$ 的 ETF，若 n 不是 $d+1/2+\sqrt{(2d+1)/4}$ 或 $d(d+1)/2$ ，則 $d+1/2+\sqrt{(3d+1)/4} \leq n \leq d(d+2)/3$ 。證明在 $n > 2d$ 時令 q 為共同角度倒數， $c=q^2-d$ 為正整數，滿足 $c(n-d)=d(d-1)$ 。 $c=1$ 違反 Gerzon， $c=2$ 給最大端點， $c \geq 3$ 給新上界。再對維數 $n-d$ 的 Naimark 補框架使用同樣論證，取得下界。 $n=2d$ 單獨處理且已在區間內。

ETF 例子與 Krein 條件

$(d,n)=(6,16)$ 、 $(22,176)$ 達到 $n=d(d+2)/3$ ，補全分別有 32、352 點。強度恰三的對蹠三角度集合因此有 $|X| \leq 2d(d+2)/3$ 。另一個結果是：ETF 所對應特殊強正則圖族的兩條 Krein 不等式，恰等價於 Gerzon 的上下界。這不表示所有圖可行性條件都多餘，角度整數性、參數整數性與實際存在性仍有額外限制。

四角度五設計與 Levenstein 界

當 $n > d(d+1)/2$ ，Levenstein coherence 下界平方為 $(3n-d(d+2))/((d+2)(n-d))$ 。等號排列的內積是 0、 $\pm p$ ，補成對蹠集合後為四角度五設計。整數矩陣 $Z=(G-I)/p$ 的兩特徵值 $-1/p$ 與 $(n-d)/(dp)$ 重數不相等；代數共軛論證迫使它們為整數。非正交圖又給出維數 $m=n-d(d+1)/2$ 的兩距離嵌入，排除 $n=d(d+2)/2$ 的重複向量例外後，得到 $n \geq d(d+3)/2$ 。

整數參數與更小的上界

令 $q=1/p$ 、 $a=3q^2-d-2$ ，則 $n=d(d+2)(d-1+a)/(3a)$ 。除特殊例外外， a 為 2 到 $2(d-1)(d+2)/(d+5)$ 之間的整數， n 也須整數。 $a=2$ 對應緊七設計端點；精確強度五排除此端點，剩餘 $a \geq 3$ ，得到 $|X| \leq 2d(d+2)^2/9$ ，比經典 $d(d+1)(d+2)/3$ 更小。例子 $(d,n)=(7,63)$ 、 $(22,1408)$ 達線數上界，來自高一維緊七設計的赤道截面；原文未證明所有等號例都如此產生。

閱讀重點與來源

本文三種上界有不同假設：一般偶數角度用調和像空間；ETF 與 Levenstein 等號排列則用譜與整數性。它們提供必要條件，沒有為每組留下的候選參數建構點集。來源：Zhiqiang Xu、Zili Xu、Wei-Hsuan Yu，Bounds on antipodal spherical designs with few angles，The Electronic Journal of Combinatorics 28(3) (2021)，P3.39，DOI:10.37236/9891。本導讀依 arXiv:2007.13999v3 (2020年7月30日) 全文，未將來源中的猜想或問題宣告為現今已解定理。

讓時頻分析更可重現：複數球面設計與ConceFT

ACHA 54 (2021), 137–144 | 兩頁中文導讀

研究問題：在雜訊中看清變動的頻率

心搏、腦波等訊號的頻率與振幅會隨時間改變，單看整段頻譜容易丟失短暫事件。同步壓縮轉換SST讓時頻圖更集中，但在低訊雜比時仍可能出現散斑或模糊。本文以複數球面設計改進ConceFT的視窗取樣，使同一資料與設定產生固定結果，並以模擬訊號及睡眠腦波展示用途。

ConceFT先前如何平均許多視窗？

先選 J 個正交標準視窗 $h_1, \dots, h_J$ ，再以單位向量 x 作係數，形成 $h_x = \sum x_j h_j$ 。對各視窗分別計算SST，最後平均其幅值。原始ConceFT在實球面隨機取 x ，也可推廣到複數單位球面。非線性SST與多視窗平均結合，讓訊號的共同頻率結構保留，同時減弱隨視窗改變的雜訊圖樣。

核心改進：把隨機取樣換成均勻設計

固定有限視窗數時，隨機係數會使不同次執行略有差異；大量增加取樣雖能穩定結果，也提高運算成本。作者改用準均勻實球面設計或複數球面設計作確定性的積分節點，分別命名QU-ConceFT與CQU-ConceFT。它們與隨機RU、CRU版本比較；「複數」是視窗混合係數，不表示輸入生理訊號必須是複數。

數學表達：球面數值積分

給節點 x_k 與權重 w_k ， $C_f(t, v) = [\sum w_k |SST(h_{x_k} f(t, v))|^q]^{1/q}$ ， $q > 0$ 。球面設計使用等權 $w_k = 1/N$ ，本文實驗皆 $q=1$ 。理想ConceFT則把有限和改為整個係數球面的積分。設計對指定低次多項式精確積分，提供分布良好的節點；SST幅值不是一般低次多項式，因此不能宣稱有限設計已精確計算理想ConceFT。

為何視窗數與節點數不同？

J 是起始正交視窗數， N 是混合視窗數。模擬中各ConceFT版本採前三個Hermite視窗，即 $J=3$ ；實球面7-design用 S^2 上32節點，複數三角4-design用 Ω_3 上40節點，後者由 S^5 上的實4-design取得。RU與CRU示例各用32隨機點。普通MT-SST用六個Hermite視窗；更多視窗的時頻展寬可能使曲線模糊。

讓時頻分析更可重現：複數球面設計與ConceFT

ACHA 54 (2021), 137–144 | 兩頁中文導讀

模擬資料與評估指標

作者產生兩個振幅及瞬時頻率隨時間變動的振盪成分，活動區間分別為5至16秒與0至10秒，再加白色高斯雜訊。資料長16秒、取樣100Hz，主要例子訊雜比約0.11dB。把各時間切片的時頻能量正規化後，以最優傳輸距離OTD比較估計圖與由真實瞬時頻率形成的理想圖，再對時間平均；OTD較小表示更接近真實頻率分布。

數值結果顯示穩定性，也有條件限制

100次模擬比較中，實設計版相對實隨機版的OTD平均與標準差較小；複數設計版平均低於複數隨機版，但兩者標準差接近。作者另測試-7至7dB，在高訊雜比區域也觀察到隨機版勝過對應設計版。因此成果是消除視窗抽樣隨機性並取得相近或較好的實驗表現，不是證明每個訊號、每個訊雜比都嚴格優於隨機法。

腦波案例：把睡眠紡錘波看得更清楚

來源展示一位受試者的C3A2腦波，以200Hz取樣，睡眠分期由兩位專家共識標記。30秒N2睡眠片段中，約14Hz的紡錘波在時頻圖中呈現短暫帶狀結構。兩種ConceFT相較單視窗SST有較少散斑，而CQU提供至少相近的可視化品質及固定視窗。此例是方法展示，沒有提供大規模診斷準確率或自動偵測效能。

解讀界線與後續研究

文章討論被慢波重疊的可能紡錘結構，但未完成其生理意義與臨床效度研究。自動辨認不同紡錘波、連結睡眠動態，是作者列出的未來工作。設計版可重現性指固定節點、資料與設定時消除視窗抽樣變異；它不會消除生理變異、資料雜訊或所有數值誤差。公平比較亦應留意示例中32與40節點的運算量不同。

跨領域意義與正式來源

本篇把離散幾何的球面設計，轉化為訊號處理中的可重現數值積分方案，展現純數學構造與生理資料分析的連結。合作作者包括Sourisseau、Wang、Womersley、Wu與Yu；正式刊於Applied and Computational Harmonic Analysis 54 (2021)，137–144，DOI:10.1016/j.acha.2021.02.003。導讀依已找回的8頁正式刊行全文及附錄，不以摘要推測實驗內容。

球面兩距離 {4,2,1} 設計的分類

Author manuscript (15 pages) | 兩頁中文導讀

問題：兩種距離加上三種調和矩

令 X 是 n 維單位球面上的有限集合，不同點的內積恰有兩個值。再要求所有一次、二次與四次齊次調和多項式在 X 上的總和為零，稱為調和指標 $\{1,2,4\}$ 的設計。一次條件表示零重心；二次條件表示 $\sum uu^T = (|X|/n)I$ ，即各方向的二階能量相同。四次條件限制更細的方向分布。由於未假設三次條件，不能先把 X 視為普通球面四設計。

主定理：只剩兩種極端結構

對 $n \geq 2$ ，作者證明 X 必為 tight spherical 4-design，或 X 與 $-X$ 不相交而其聯集為 tight spherical 5-design。Tight 指點數恰等於設計的 Fisher 下界：四設計為 $n(n+3)/2$ ，五設計為 $n(n+1)$ 。因此第二類 X 本身有 $n(n+1)/2$ 點。這是結構分類，並非宣告每組形式參數都能實現。從五設計任取一半也未必零重心，必須另外檢查一次條件。

幾何如何轉成圖的特徵值

以某一種內積定義相鄰關係，兩距離二設計連到強正則圖的球面嵌入。設非平凡特徵值為 x, y ，參數為 (v, k, λ, μ) ，則 $k = \mu - xy$ 、 $\lambda = x + y + \mu$ 、 $v = (k - x)(k - y)/\mu$ 。嵌入於 y 特徵空間，維數 n 等於其重數；Gram 矩陣是 $(v/n)E_v$ ，兩內積為 y/k 與 $(-y-1)/(v-k-1)$ 。幾何資料於是由三個代數變數控制。

四次矩形成 Diophantine 方程

使用 Gegenbauer 多項式的加法公式，四次條件可寫為 $Q_4(1) + kQ_4(a) + (v-k-1)Q_4(b) = 0$ 。代入參數後分解，排除符號不可能或退化因子，留下對 μ 為三次的主要因子 $F_3(x, y, \mu) = 0$ 。還須滿足正性、整數性、非零分母，以及兩距離上界 $v \leq n(n+3)/2$ 。非 conference 分支的特徵值為整數；conference 分支經小維數檢查只留下正五邊形。

整數的離散性提供精確限制

長證明先把 y 夾在 $-(2x^3+3x^2)$ 附近的狹窄條帶，再控制 μ 與維數偏差。核心技巧是構造整數值 z ，利用帶明確餘項的估計證明 $|z|$ 小於 1，於是 z 必為零。新增等式降低代數曲面的自由度；消去變數、定位實根並使用整數性後，得到兩個參數族。小參數則在已證有界的範圍內枚舉。這是結合圖論限制的專門方法，而非任意整數方程的通用解法。

球面兩距離 {4,2,1} 設計的分類

Author manuscript (15 pages) | 兩頁中文導讀

第一族：緊四設計

令 t 為正整數，第一族有 $x=t$ 、 $y=-t^2(2t+3)$ 、 $\mu=t^3(2t+3)$ ，其維數 $n=4t^2+4t-2$ ，點數 $v=n(n+3)/2$ 。內積為 $-1/(2t)$ 與 $1/(2(t+2))$ 。代入後三次調和條件也成立，因此原有的 $\{1,2,4\}$ 補成普通四設計，點數取等號即為 tight。 $t=1$ 對應六維27點， $t=2$ 對應22維275點；正五邊形則來自另外的 conference 分支。

第二族：補成緊五設計

第二族保持 x 、 y 相同，但 $\mu=t^2(t+1)(2t+3)$ ，得到 $n=4t^2+4t-1$ 、 $v=n(n+1)/2$ ，兩內積為 $\pm 1/(2t+1)$ 。不存在內積 -1 ，所以 X 與 $-X$ 不相交。聯集保留二、四次條件，而對蹠性使一、三、五次自動相消，故為點數 $n(n+1)$ 的 tight 五設計。 $t=1$ 給七維28點補成56點； $t=2$ 給23維276點補成552點。任意 t 的存在性仍須另外證明。

Nozaki 的短證明揭露上下界的剛性

作者在手稿末尾致謝 Nozaki 並介紹短證明。若 X 也滿足三次條件，則它是四設計，而 Fisher 下界與兩距離上界相同，直接得到 tight。若不滿足三次條件，既有改良少距離界給 $|X| \leq n(n+1)/2$ 。對蹠多重集合 $X \cup -X$ 是五設計，Fisher 下界給反向不等式，迫使取等號；等號的秩條件排除重複點，得到第二種結構。此證明依賴已知的改良少距離界。

電腦輔助與結論範圍

原文用符號計算驗證多項式恆等式、區域不等式與有限枚舉；大參數由分析估計和整數性涵蓋。此導讀解釋證明並展示參數代入，未重新執行全部補充程式。不能刪去點數上界後仍引用原定理；較強的無限制整數方程分類，以及三距離五設計的延伸，在所讀手稿中另列為猜想。這些標示只反映來源版本，不表示目前研究狀態。

意義與來源

本篇把少距離幾何、強正則圖譜與整數方程連在一起：平均性造成代數條件，離散性使近似界成為精確分類。來源為 Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Ziqing Xiang、Wei-Hsuan Yu、Yan Zhu，Classification of spherical 2-distance $\{4,2,1\}$ -designs by solving Diophantine equations，Taiwanese Journal of Mathematics 25(1) (2021)，1–22，DOI:10.11650/tjm/200601。本文依 ziqing.org 提供的十五頁作者手稿，手稿標題為 Classification of feasible parameters by solving Diophantine equations。

Folded n-cube 的編碼上界

arXiv:1801.06971v1 (2018) | 兩頁中文導讀

Folded cube 中的碼是什麼

二元 Hamming cube 的頂點是長度 n 的 0-1 字串，距離為不同座標數。Folded cube 把 x 與逐位互補的 $\bar{x}$ 視為同一點 $[x]$ ，因此共有 2^{n-1} 點，距離變成 $\delta([x],[y])=\min\{h(x,y),n-h(x,y)\}$ ，直徑 $D=\text{floor}(n/2)$ 。本篇要求不同碼字的 folded 距離至少 d ，並研究最大可能大小 $A(\square_n,d)$ 。一般 Hamming 碼不能直接沿用最小距離，因為折疊也會把接近互補的點拉近。

從兩點分布到三點資訊

Delsarte 線性規劃以兩點距離分布及 Bose-Mesner 代數的正半定性限制碼大小。作者推廣 Schrijver 的方法，固定一個基點，加入相對基點的距離層投影 E_i^* ，與鄰接矩陣 A_1 共同生成 Terwilliger 代數 T 。這個通常不交換的代數保留三點相容資訊，有機會排除只用兩點分布時容許的形式解。它仍是上界放鬆，並不保證每個可行分布都能實現為碼。

三點軌道與偶數邊界

把三點的第一點送到零後，以 i, j 表示另外兩點到零的距離， t 表示支撐交集大小，第三距離為 $\min\{i+j-2t, n-(i+j-2t)\}$ 。奇數長度每個互補對有唯一較小支撐代表；偶數長度的最外層則沒有，因此 t 要按原文規則對互補代表取最大交集。最外層點數也由 $\text{binom}(n,D)$ 除以二。這些邊界因子會影響軌道矩陣、區塊係數與目標函數。

代數基底與多項式規模

用 M_{ij}^t 表示指定三點型態的零一指示矩陣。作者證明，固定基點的自同構群不變矩陣所形成的代數，恰好就是 T 。其維數在 $n=2D+1$ 時為 $(D+1)(D+2)(2D+3)/6$ ，在 $n=2D$ 時為 $(D+1)(D^2+2D+3)/3$ ，因此只有 $O(n^3)$ 個參數。證明藉由距離層間升降算子的乘積與二項式反演，把每個軌道矩陣寫入 T 。

區塊對角化才真正縮小 PSD 檢查

標準空間可分解成 thin 不可約 T 模組，每個距離層在模組中至多一維，且 endpoint r 決定模組類型。奇數長度的區塊階數為 $D+1-r$ ；偶數長度則在 r 偶數時為 $D+1-r$ 、 r 奇數時為 $D-r$ ， D 奇數時沒有 $r=D$ 模組。刪除重複副本後， $n=8$ 的 128 階矩陣只需檢查 5、3、3、1、1 階區塊； $n=9$ 則從 256 階降成 5、4、3、2、1 階。

Folded n-cube 的編碼上界

arXiv:1801.06971v1 (2018) | 兩頁中文導讀

三點變數與目標函數

令 λ_{ij}^t 計數碼 C 的有序三元組中指定型態的數量， γ_{ij}^t 是固定基點後軌道矩陣的非零項數，定義 $x_{ij}^t = \lambda_{ij}^t / (|C| \gamma_{ij}^t)$ 。若第 i 距離層大小為 k_i ，則 $|C| = \sum k_i x_{i0}^0$ 。目標函數因此是三點變數的線性式；偶數最外層的 k_D 必須除以二。正規化還給 $x_{00}^0 = 1$ 、非負性、上限、軌道重標號對稱，以及禁距離的零條件。

兩個平均矩陣帶來雙重 PSD 限制

碼的指示向量外積 $\chi_C \chi_C^T$ 本來就是正半定。對含基點零的自同構像取平均，得到 $M' = \sum x_{ij}^t M_{ij}^t$ ；對不含零的自同構像取平均，移除正比例因子後得到 $\sum (x_{v0}^0 - x_{ij}^t) M_{ij}^t$ ，其中 v 是第三 folded 距離。第二個矩陣不是補集碼的指示矩陣。把兩者搬到不可約小區塊，就得到原文的 SDP；其係數是明確的二項式和。

為何是上界，且至少不弱於 LP

每個真實碼都產生 SDP 可行分布，而且目標值等於碼大小，所以放鬆後的最大值給 $A(\square_n, d)$ 上界。兩個平均矩陣組合後回到全群不變的距離矩陣，故 SDP 的可行分布也滿足 Delsarte LP 條件；新上界只會更小或相等。原文以 $O(n^3)$ 變數與 $O(n)$ 個線性階數區塊控制計算規模。數值上，primal 可行解本身不是上界證書，仍需 dual 可行性或適當誤差控制。

數值成果與一項可直接核對的版本疑點

2018 年 v1 報告 $(n, d) = (10, 3)$ 的界由 32 改善為 24， $(12, 4)$ 由 85 為 54， $(11, 4)$ 由 27 為 20；此導讀未重跑這些 SDP。但同表 $n=8$ 、 $d=2$ 所列 28 與定義衝突：偶同位元的互補對明確給 64 個碼字，逐對驗證最小 folded 距離為 2；翻轉固定座標給完美匹配，反向得到上界 64，故 $A(\square_8, 2) = 64$ 。本教材不採用 28，也不推斷尚未取得的期刊全文是否已修正。

閱讀重點與來源

本篇核心是 folded cube 的三點軌道、Terwilliger 代數基底與可實作區塊分解，讓更強的凸最佳化上界成為可能。使用時須注意偶數邊界、兩個 PSD 條件、正規化，以及數值證書的方向。來源：Lihang Hou、Bo Hou、Suogang Gao、Wei-Hsuan Yu，New code upper bounds for the folded n-cube，arXiv:1801.06971v1 (2018)；Journal of Combinatorial Theory, Series A 172 (2020)，105182，DOI:10.1016/j.jcta.2019.105182。

核心問題：飽和不等於最大

本篇研究實等角直線配置的兩個問題：既有配置能否再加一條線，以及如何從高維配置中找出大型低維子集。若 X 在自己的張成空間內，不能再加入一條與所有舊線具有相同角度的直線，便稱 X 飽和。這只是固定配置的延伸性質，不代表它在所有配置中線數最多。本篇同時證明 18 維中的某個 54 線配置飽和，又找到另一個 56 線配置，清楚展示兩種概念的差別。

把連續幾何化成有限符號枚舉

以單位向量代表直線，兩兩內積為 $\pm\alpha$ ，實際夾角是 $\arccos\alpha$ 。從 X 選 r 個線性獨立向量組成基底矩陣 B ，令 $H=B^TB$ 。任何候選 v 都需滿足 $B^Tv=\alpha s$ ，其中 s 是 r 維正負一符號向量。因此 $v=\alpha BH^{-1}s$ ，且其單位長條件是 $\alpha^2 s^T H^{-1} s=1$ 。 s 與 $-s$ 表示同一直線，固定第一個符號為正後，只剩 2^{r-1} 種模式。這裡的基底是線性代數基底。

相容圖與飽和證書

把所有通過單位長條件的候選當作圖頂點，當兩候選的內積絕對值為 α 時連邊。clique 代表可同時加入基底的直線集合，故包含該基底的最大配置有 $r+\omega(G)$ 條線。若這個值恰等於 $|X|$ ，就證明 X 飽和。反過來，若最大 clique 更大，卻不一定能保留 X 的所有原向量，因此不能立刻說 X 可延伸；仍要檢查對既有 clique 的共同鄰居。

14 維的完整計算例子

Tremain 的設計構造給 14 維中的 28 條等角直線， $\alpha=1/5$ 。作者選取偶數編號的 14 個向量為基底，從 $2^{13}=8192$ 個模式中找到 378 個單位候選，再以 Sage 算得相容圖最大 clique 為 14。於是 $14+14=28$ ，得到飽和證書。這把原本可能考慮的 2^{27} 種符號組合大幅縮減。數字來自原文的計算結果；本導讀沒有宣稱重跑該大型枚舉。

Witt 設計與六種飽和配置

Theorem 1 證明指定的 28 線／14 維、40 線／16 維、48 線／17 維、54 線／18 維、72 線／19 維與 90 線／20 維配置飽和。後兩者由 24 點、759 個八元區塊的 Witt 設計建構；其標準記法為 $S(5,8,24)$ 。90 線例子選 20 個基底後只有 70 個單位候選，恰好全是剩餘舊線，因此沒有任何新方向可加。再加正交條件可選出 72 線／19 維子配置。

等角直線的飽和配置與大型新構造

arXiv:1801.04502v2 (2018) | 兩頁中文導讀

第二種方法：切出低秩子配置

從大型等角配置 X 中選 r 個線性獨立向量 T ，收集 $X \cap \text{span } T$ 的所有向量。它們自動繼承原本角度，並因包含 r 個獨立向量而恰好具有秩 r 。也可以直接在 Gram 矩陣中選 r 個獨立列，收集落在其列空間中的所有列，再取對應主子矩陣。反覆隨機選擇 T 是找大型例子的實驗方法；找到一個可驗證例子就足以給存在性下界，但不提供最大值證明。

固定 $\alpha=1/7$ 的四個新構造

作者以已知的 344 線／43 維配置為母體，它可由 $\text{SRG}(344,168,92,72)$ 得到。數千次試驗後，在 42 維找到 248 線；類似方法在 41、40、39 維分別找到 200、168、152 線。這些成果針對固定角度 $\alpha=1/7$ ，不能說成不限制角度時的最大線數。例如原文本來就列出 $\alpha=1/5$ 的 276 線配置可置於 23–41 維空間。

上界還留下多少空間

若 $r\alpha^2 < 1$ ，相對界為 $|X| \leq r(1-\alpha^2)/(1-r\alpha^2)$ 。它由 Gram 矩陣的跡與平方跡不等式推出；分母為正是必要前提。 $\alpha=1/7$ 時化成 $48r/(49-r)$ ，因此 42、41、40、39 維的整數上界依序為 288、246、213、187。與新構造相比，原文的下上界區間是 $[248,288]$ 、 $[200,246]$ 、 $[168,213]$ 、 $[152,187]$ ，仍有距離，並未求得精確最大值。

18 維的 56 線與計算瓶頸

由 72 線／19 維配置反覆選 18 個獨立向量，作者找到兩種 56 線配置，以額外法向量 u_1 、 u_2 描述其子空間，並確認兩者飽和。這把當時 $N(18)$ 的已知構造下界從 54 提高到 56。另一方面，42 維的飽和檢查需枚舉 2^{41} ，約 2.2 兆種模式，作者未完成計算。因此 248 線／42 維在本篇是新構造，不能加上已證明飽和的標籤。

貢獻、限制與原文來源

本篇展示精確線性代數、相容圖與隨機低秩搜尋如何配合：前者驗證固定配置不能延伸，後者產生更大的例子。作者據此提出若干維度最大值猜想，但飽和證據尚不足以排除所有其他配置。所有歷史紀錄與猜想狀態均依原文版本敘述。來源：Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，Saturated configuration and new large construction of equiangular lines，arXiv:1801.04502v2 (2018)；Linear Algebra and its Applications 588 (2020)，272–281。

等角直線與 Lemmens–Seidel 猜想

arXiv:1807.06249v4 (2019) | 兩頁中文導讀

研究問題與完成範圍

本篇研究內積為 $\pm 1/5$ 的實等角直線系統。Lemmens–Seidel 猜想預測 $23 \leq r \leq 185$ 時最大值是 276， $r \geq 185$ 時為 $r+1+\text{floor}((r-5)/2)$ 。基底大小 K 是所有 switching 等價圖中最大的負內積 clique 大小；此角度下 $K \leq 6$ 。作者補上 $K=3$ 、5 的證明，並改善 $K=4$ 的部分上界。因此本篇不是整個猜想的完整解決。

柱分解如何整理幾何

固定 K -base P ，依每個向量與 P 的內積符號模式分類成柱。向量可寫成 $x=h+c$ ，其中 h 在基底張成空間、 c 與該空間正交；同柱的 h 相同。兩個殘差內積等於原內積減去投影內積，所以剩下的是低維、少數內積值的配置。 $(K,1)$ 柱內原內積只能為 $+\alpha$ ，否則兩點加上共同的 $K-1$ 個負鄰居會形成更大基底。

Schur 補給跨柱限制

若區塊矩陣左上角 A 正定，整體正半定等價於 $C-B^T A^{-1} B$ 正半定。特殊參數 $\alpha=1/(2n+1)$ 、 $K=n+2$ 讓同一 $(K,1)$ 柱的正規化殘差互相正交；跨柱內積是 $1/[n(n+1)]$ 或 $-1/(n+1)$ 。另一柱只要至少有兩點，就可用二階 Schur 補壓住柱大小： $n \leq 3$ 時至多 $2n^2(n+1)$ ， $n \geq 3$ 時至多 $n^2(n+1)^2/2$ 。

$K=3$ ：有限枚舉與秩的分工

$K=3$ 有三個 $(3,1)$ 柱，同柱正規化殘差內積為 $1/10$ ，跨柱則為 $1/4$ 或 $-1/5$ 。作者用另一柱四個測試點，將候選分成 16 種模式，再由四階 Schur 補與有限枚舉證明另一柱至多 54 點。若兩柱都至少四點，總數至多 165；否則只有一大柱，其殘差秩限制給總數至多 $r+6$ 。故 $|X| \leq \max\{165, r+6\}$ 。

$K=4$ 的結果為何還不夠

特殊正交柱界在 $\alpha=1/5$ 、 $K=4$ 時給單柱 24 的上界，但需要另一柱至少兩點。作者控制四個 $(4,1)$ 柱的總點數，再把三個 $(4,2)$ 柱轉成內積 $1/13$ 、 $-5/13$ 的兩距離集合，得到 $|X| \leq 100+3s(r-4, 1/13, -5/13)$ 。這仍不足以完成猜想，因為忽略基底大小與跨柱相容性後，單柱模型會容許原問題不接受的構造。

等角直線與 Lemmens–Seidel 猜想

arXiv:1807.06249v4 (2019) | 兩頁中文導讀

K=5 與 276 線的唯一性

五個 (5,1) 柱共至多 15 點。先移除這些柱，再加 $p_6 = -\sum p_i$ ，讓 (5,2) 柱變成輔助集合 Y 的 (6,3) 柱。若有多柱且 $|Y| > 258$ ，已知分類使 Y 嵌入唯一的 276 線系統。該系統有 90 個不相交三角形，至多刪去 17 點仍會留下三角形，進而逼出原 X 的六點基底，矛盾。因此多柱分支 $|X| \leq 272$ ，單柱分支則以譜方法得 $|X| \leq 4r/3 + 12$ 。

恰秩與環境維度不能混用

$M(r)$ 允許配置張成的維度小於 r ； $M^*(r)$ 則要求恰好張成 r 維。雖然 $M(8)=28$ ，那些最大配置只張成 7 維，因此不能直接推出 $M^*(8)=28$ 。 $M(r)$ 隨環境維度不減，但 $M^*(r)$ 沒有同樣的簡單單調性。這篇另一主題便是求出恰秩 8、9、10 的最大線數。

推廣 Neumann 定理的角度限制

若 $r > 3$ 且 $|X| > 2r-2$ ，偶數 r 時 $1/\alpha$ 必為奇整數；奇數 r 時，還可能是 $\sqrt{2r-1}$ 。證明取 $2r-1$ 個向量，其整數 Seidel 矩陣的 $-1/\alpha$ 特徵值重數至少 $r-1$ 。若它無理，代數共軛的重數迫使最小多項式只能為二次；再以跡、平方跡、正半定性與行列式模四條件，排除其他可能。

Conference 例外與完全搜尋

平方根例外可把 $2r-1$ 個向量補成 $2r$ 個向量的 ETF，來自對稱 conference 矩陣；其階數條件迫使 r 是奇數。角度限制結合相對界，把恰秩最大值化為有限角度的搜尋。固定正定基底後，候選向量由內積符號決定，再用相容圖最大 clique 求延伸；只有覆蓋全部基底類別才可得到全域結論。單一飽和配置本身不代表最大。

最終結果與原文來源

作者得到 $M^*(8)=14$ 、 $M^*(9)=18$ 、 $M^*(10)=18$ 。恰秩 9 的 18 線可由 $\alpha=1/\sqrt{17}$ 的 Paley 構造達到；恰秩 8 的 $\alpha=1/3$ 搜尋檢查 1044 個七點圖，留下三個正定基底類別。這些枚舉數字來自原文，導讀沒有宣稱重跑全部計算。來源：Yen-Chi Roger Lin、Wei-Hsuan Yu，arXiv:1807.06249v4 (2019)；Discrete Mathematics 343(2) (2020), 111667，DOI:10.1016/j.disc.2019.111667。

遞迴多項式的封閉公式與應用

Ars Combinatoria 142 (2019), pp. 175–195 | 兩頁中文導讀

以一個家族統整多種遞迴

本篇研究二變數多項式 $M_0=a$ 、 $M_1=bx+cy+d$ ，以及 $M_n=xM_{n-1}+yM_{n-2}$ ($n \geq 2$)，其中 a 、 b 、 c 、 d 是實常數。固定 $y=1$ 或 $x=1$ 並調整初值，可得到不同 Fibonacci 型家族。作者提供有限和與 Binet 封閉公式，再應用於數值序列的長期行為、組合恆等式，以及微分與卷積的關聯。

有限和公式的精簡寫法

令 $U_0=0$ 、 $U_1=1$ ，且 U 遵循相同遞迴。則 $n \geq 1$ 時， $M_n=M_1U_n+ayU_{n-1}$ ，而 $U_n=\sum_j \text{binom}(n-1-j,j)x^{n-1-2j}y^j$ ，求和範圍為 $0 \leq j \leq \text{floor}((n-1)/2)$ 。這是原文有限和的等價整理： j 表示二步塊數，另外有 $n-1-2j$ 個一步塊，排列二步位置得到二項係數。Pascal 恆等式也直接驗證遞迴。

Binet 公式與退化情況

特徵方程為 $r^2-xr-y=0$ 。兩根不同時， $M_n=Ar_+^n+Br_-^n$ ，其中 $A=(M_1-ar_-)/(r_+-r_-)$ 、 $B=(ar_+-M_1)/(r_+-r_-)$ 。重根必須滿足判別式 $x^2+4y=0$ ，故軌跡是 $y=-x^2/4$ ；掃描版該處的正負號以此條件校正。若 $r=x/2 \neq 0$ ，解為 $[a+n(M_1/r-a)]r^n$ ；若 $x=y=0$ ，直接由遞迴知 $n \geq 2$ 的項全為零。

穩定三角形與初值的角色

參數區域 $|y|<1$ 、 $|x|<1-y$ 是頂點 $(0,1)$ 、 $(-2,-1)$ 、 $(2,-1)$ 所圍三角形的嚴格內部，兩根都在單位圓內，因此所有初值都趨零。外部存在不穩定根，卻不能據此說每組初值皆發散：例如 $x=3/2$ 、 $y=1$ ，根為 2 、 $-1/2$ ；取 $M_0=1$ 、 $M_1=-1/2$ ，增長項消失，留下 $M_n=(-1/2)^n$ 。教材保留這個必要限定。

三條邊與三個頂點

右邊 $x=1-y$ 的根是 1 、 $-y$ ，序列趨常數；左邊 $x=y-1$ 的根是 -1 、 y ，通常漸近交替。底邊 $y=-1$ 、 $|x|<2$ 的根為 $e \pm i\theta$ ， $x=2\cos\theta$ ，因此有界； $\theta/(2\pi)$ 為有理數時具有週期。頂點 $(0,1)$ 交替初始兩值； $(\pm 2,-1)$ 是重根 ± 1 ，除非初值消去 n 因子，否則會出現線性振幅增長。

遞迴多項式的封閉公式與應用

Ars Combinatoria 142 (2019), pp. 175–195 | 兩頁中文導讀

由參數代入得到字串恆等式

取 $a=1$ 、 $b=c=0$ 、 $d=w$ 、 $x=1$ 、 $y=w^2-w$ ，則 $M_n=w^n$ 。把這組參數代入有限和，可得 $w^n=\sum_k[\text{binom}(n-k,k)+(w-1)\text{binom}(n-k-1,k)]w^k(w-1)^k$ 。當 w 是正整數，右側也可以解釋為 w 個字母組成的長度 n 字串之分類計數；越界二項係數取零。

分類為何既不重複也不遺漏

令 $\phi_k(s)$ 為字串前 $n-k$ 格的非零字母數。 A_k 要求 $\phi_k=k$ ； B_k 要求 $\phi_{k+1}=k$ 且第 $n-k$ 格非零。兩類大小正是恆等式的兩項。 $\delta_k=\phi_k-k$ 每步下降一或二，從非負走到非正：遇到零是 A 類，從一跳到負一是 B 類。單調性使交會唯一，所以所有字串恰好計一次。例如 $n=w=3$ ，四個非空類大小為 1、2、12、12，合計 27。

用生成函數看卷積與微分

離散卷積定義為 $(f^*g)_n=\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$ 。令 $B_0=B_1=1$ 、 $B_n=B_{n-1}+yB_{n-2}$ ，其生成函數為 $1/D$ ， $D=1-z-yz^2$ 。另令 $R_0=1$ 、 $R_1=1+y$ ，且使用相同遞迴，生成函數為 $(1+yz)/D$ 。直接對 y 微分得到 z/D^2 ，因此比對係數即有 $(B^*B)_n=R'_{n+1}(y)$ 。這補充了原文的係數計算證明。

數值例子與一般公式的參數慣例

$y=1$ 時， B 是 1,1,2,3,5,...，自卷積是 1,2,5,10,20,38,...； $y=2$ 時，本篇 Jacobsthal 型初值給 $B=1,1,3,5,11,\dots$ ，卷積是 1,2,7,16,41,94,...。一般 Theorem 8 可清楚寫成：先將 $A=cy+d$ 固定，對新變數 t 微分 $Q_{n+1},\{A,a,A\}(t)$ ，最後令 $t=y$ 。若把 $A(y)$ 一起微分會額外產生項，與該公式不同。

閱讀重點與來源

這篇的價值在於同一二階遞迴可以同時用有限和、特徵根、字串分類與生成函數理解。讀者應分清多項式變數與固定參數、穩定性與個別初值軌跡，以及有界、週期、收斂三者。來源：Michelle Haver、Kathleen Lee、William McDermott、Alexander Wilson、Wei-Hsuan Yu、Aklilu Zeleke，Closed Forms of Recursive Polynomials and Applications，Ars Combinatoria 142 (2019), 175–195。

少距離集合與等角直線的上界

Glazyrin-Yu | 兩頁中文導讀 | 問題與成果

研究問題：距離很少，點數能有多大？

在單位球面上，兩點距離的平方是 2 減去兩倍內積，因此「只有 s 種距離」等價於「不同點間只有 s 種內積」。這種少距離集合把連續幾何和有限組合結構連接起來。等角直線是其中的重要特例：每條直線選一個單位向量後，不同向量內積的絕對值皆為固定常數 α ；改變向量的正負號不改變直線本身。

自然構造與經典上界

記 $g(n)$ 為 n 維空間內球面二距離集合的最大點數， $M(n)$ 為等角直線的最大條數。正單純形有 $n+1$ 個頂點；將所有邊中點正規化，可得到 $n(n+1)/2$ 個點。兩條邊是否共用頂點恰好形成兩種關係。另一方面，Gerzon 的經典界給出 $M(n) \leq n(n+1)/2$ 。困難在於：一般二距離集合不是等角集合，而固定角度的資訊也未充分進入這個維度計數界。

主要成果與不能省略的條件

本篇證明：對 $n \geq 7$ ， $g(n) = n(n+1)/2$ ，可能例外僅出現在部分 $n = (2k+1)^2 - 3$ 。這不代表所有例外維度均已解決。固定共同內積絕對值 $1/a$ 時，作者給出 $M_{1/a}(n) \leq n(2a^2/3 + 4/7) + 2$ ，適用所有 $a \geq 3$ 及正整數 n 。它的特色是參數範圍普遍有效；不是宣稱每一組參數都取得當前最佳界。

從固定角度走向全角度

對 $n \geq 359$ ，取唯一正奇數 a ，使 $a^2 - 2 \leq n \leq (a+2)^2 - 3$ ，則 $M(n) \leq (a^2 - 2)(a^2 - 1)/2$ 。此界在一段維度上保持常數；除了左端 $n = a^2 - 2$ 外，嚴格改善 Gerzon 界。例如 $359 \leq n \leq 438$ 時得到 $M(n) \leq 64620$ 。這只是上界，不能據此推論有如此多條直線的構造。

第一層方法：PSD 核提供可用的不等式

正規化 Gegenbauer 多項式 G_k 滿足 $G_k(1) = 1$ ，其內積核矩陣 $[G_k(\langle x_i, x_j \rangle)]$ 為半正定 (PSD)。例如 $G_2(t) = (nt^2 - 1)/(n-1)$ 。把矩陣所有元素相加必須非負，立即得到經典相對界 $Ma(n) \leq n(1 - \alpha^2)/(1 - n\alpha^2)$ ，但必須假設 $n\alpha^2 < 1$ 。這個簡單例子展示「幾何限制變成矩陣正性」的基本思路。

少距離集合與等角直線的上界

Glazyrin–Yu | 兩頁中文導讀 | 證明與結構

核心創新：讓大重數特徵值耗用跡

對每一種距離建立鄰接矩陣 A_i ，以 $s-1$ 次插值多項式證明 $A_i - kI$ 的秩至多為 K ； K 是相關低次函數空間的維度。因此每個 A_i 都有至少 $N-K$ 重的指定特徵值。把這些空間與全 1 向量的正交補相交，可找到至少 $N-1-K(s-1)$ 維的共同子空間。這不需要預先假設所有距離矩陣可交換。

低秩、重數與半正定性如何接合

取球面函數的非負線性組合 P ，形成逐項作用在內積上的核矩陣 H 。它在上述共同子空間有相同特徵值 λ ，而所有特徵值非負，因此「已知重數乘以 λ 」不能超過 $\text{tr}(H) = NP(1)$ 。這就是定理 9 的主不等式。在球面二距離情形，取 $P = G_2$ 和 $K = n+1$ ，可將它整理成含兩個內積參數的顯式上界。這裡的逐項核不是一般的矩陣多項式。

幾何技巧：先改造集合，再套上界

直接把 $\alpha = 1/a$ 、 $\beta = -1/a$ 代入新界並不理想。作者先固定一個基點，換號使其餘向量與它的內積皆為 $1/a$ ，再正交投影、正規化，得到 $n-1$ 維二距離集合，其內積為 $1/(a+1)$ 、 $-1/(a-1)$ 。第一次估計得到小於 na^2 的界；再選基點、分成兩組並各自投影，將主要係數改善為 $2/3$ 。 $a=5$ 、 $n=137$ 時，保留兩分支的精細公式可得到 2224 的上界，優於通用簡式取整後的 2363。

等號不是只有數字：它迫使維度剛性

若 $a \geq 3$ 為奇數、 $n \leq 3a^2 - 16$ ，且等角集合達到 $(a^2-2)(a^2-1)/2$ 個點，則它實際張成 a^2-2 維。證明追蹤 PSD 不等式的取等條件，再用換基點對應的圖換號，逼出正則性及固定共同鄰居數，也就是強正則圖。圖的譜決定衍生集合 Gram 矩陣的秩為 a^2-3 ；加回基點方向，便得到原集合的維度。這不是所有參數下構形唯一性的宣稱。

閱讀重點與來源

這篇文章的價值是把插值造成的低秩、特徵值的大重數、PSD 的跡估計，以及衍生集合的降維技巧結合。原文仍留下例外維度及極大二距離集合分類的問題。本文依作者預印本 arXiv:1611.09479v1 (2016) 撰寫，定理編號與條件亦依該版；不作 2026 年最新研究現況的宣稱。期刊書目：A. Glazyrin and W.-H. Yu, Upper bounds for s -distance sets and equiangular lines, *Advances in Mathematics* 330 (2018), 810–833。

球面調和指標 T 設計：下界與算術障礙

arXiv:1507.05373v2 (2015) | 兩頁中文導讀

只指定某些球諧階數

球面調和指標 T 設計是單位球面上的有限非空點集 Y ，要求對每個 $k \in T$ 與每個 k 次齊次調和多項式 f ，都有 $\sum_Y f(y) = 0$ 。普通 t -design 相當於 $T = \{1, \dots, t\}$ ，但本篇允許只挑選若干階數，因此未指定的低階矩不必消失。研究目標是建立點數下界，並判斷達到下界的緊設計是否存在。排除緊設計並不等於排除所有 T -design。

核函數如何產生下界

本篇使用 $Q_{n,k}(1) = \dim \text{Harm}_k$ 的 Gegenbauer 正規化。加法公式給 $M_k = \sum_{x,y} Q_{n,k}(\langle x, y \rangle) \geq 0$ ，且設計指定階的 $M_k = 0$ 。若 $F = \sum f_k Q_{n,k}$ 在 $[-1, 1]$ 非負、 $f_0 > 0$ ，並且 T 外的正階係數非正，則 $NF(1) \leq \sum_{x,y} F(\langle x, y \rangle) \leq N^2 f_0$ ，故 $N \geq F(1)/f_0$ 。取等號迫使所有非對角內積是 F 的零點。

單一指標 6 與 8 的不存在性

對單一偶數指標 $2e$ ，令 $c = -\min Q_{n,2e}$ ，則 Fisher 型界為 $b = 1 + Q_{n,2e}(1)/c$ 。高維緊性迫使內積只有 $\pm \alpha$ ，於是 Gerzon 線數上界 $n(n+1)/2$ 可用來與下界比較。指標 6 在 $n \geq 37$ 、指標 8 在 $n \geq 20$ 時已矛盾。剩餘小維度再用點數整數性；指標 6 的 $n=24$ 、231 點候選，其平方距離比 $1/3$ 又違反 LRS 條件。

二維例外與漸近定理的量詞

上述結果是 $n \geq 3$ 無指標 6 或 8 的緊設計。二維圓上取角度 $0, \pi/(2e)$ 的兩點，會使 $\cos(2e\theta)$ 與 $\sin(2e\theta)$ 的總和同時為零，因此存在兩點例外。另一方面，固定 $e \geq 3$ 再令 n 增長，Gegenbauer 到 Hermite 的尺度極限給出 $b_{n,2e}$ 為正常數乘 n^e ，終將超過 $O(n^2)$ 上界。這不是對所有 e 同時成立的統一維度門檻。

多指標的緊性需要說清楚

作者調整多個 Q 的係數，使多個位置同時達到全域極小值，藉此定義相應 Fisher 型界與緊性。這是特定多重極小值框架，不保證等於所有 LP 多項式中的最佳界；某些維度甚至無法形成指定的多項式。對 $T = \{8, 4\}$ ，平方因式分解導出可能內積 $\pm \alpha$ 、 $\pm \beta$ ，以及 $b = (n+1)(n+2)(n+5)(n+6)/252$ 。

球面調和指標 T 設計：下界與算術障礙

arXiv:1507.05373v2 (2015) | 兩頁中文導讀

從少距離結構到算術障礙

$\{8,4\}$ 的根滿足 $\alpha^2 + \beta^2 = 14/(n+12)$ 、 $\alpha^2\beta^2 = 21/[(n+8)(n+12)]$ 。點數足夠大時，Nozaki 型定理要求若干平方差比值是整數；更強的有理性還有更大的點數門檻。作者用這些條件、同餘限制與對蹠化，把大維度問題化成有限的算術模式。套用整數性前不能省略尺寸假設。

橢圓曲線與小維度 SDP 的分工

其中一個模式要求 $y^2 = (n+5)(n+8)(n+12)$ 。令 $x = n+8$ ，得到橢圓曲線 $y^2 = x^3 + x^2 - 12x$ ，作者引用整數點資料排除候選。 $9 \leq n \leq 75$ 的必要比值檢查失敗；更小維度唯一剩餘整數目標是 $n=8$ 的 65 點，但原文報告 SDP 上界 50.23。因此相應 $\{8,4\}$ 緊設計不存在。本導讀是在解釋原文計算，沒有宣稱重新產生精確證書。

一個短而有力的整數性證明

若 N 個單位向量的非對角內積屬於 $\{0, \pm\alpha\}$ 且 $N > 2n$ ，則 $1/\alpha$ 是整數。證明：Gram 矩陣 G 的秩最多 n ，所以整數對稱矩陣 $A = (G - I)/\alpha$ 有特徵值 $-1/\alpha$ ，重數至少 $N - n > N/2$ 。若它有另一個代數共軛，共軛重數相同，總重數就超過 N ，矛盾。因此它是有理代數整數，必為整數。結論不要求奇數。

其他集合與數值精度

對 $\{6,2\}$ ，目標為 $n(n+4)(2n+1)^2/[15(7n-4)]$ ，且 $\alpha^2 = 15/[2(n+8)]$ 。結合點數與角度整數性，作者排除 $n \geq 3$ ； $n=2$ 的正交兩點仍是例外。文中也處理 $\{8,6\}$ 、 $\{8,2\}$ 、 $\{10,6,2\}$ 等情形。 $\{8,2\}$ 在 $n=4$ 的目標是 9，而報告的 SDP 值是 8.9981，必須保留嚴格差距，不能四捨五入成 9。

尚未解決的候選與原文來源

對 $\{12,8,4\}$ ，本篇留下 $n=9$ 、13、16 三個未解決維度，目標分別是 285、1311、3315；上下界相合本身不是構造。本段只說明該版本的狀態。來源：Yan Zhu、Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Kyoung-Tark Kim、Wei-Hsuan Yu，arXiv:1507.05373v2 (2015)；期刊版 On spherical designs of harmonic index T，Electronic Journal of Combinatorics 24(2) (2017), P2.14。

等角直線與球面二距離集合的新上界

Wei-Hsuan Yu (2017) | 兩頁中文導讀 | 問題與成果

問題背景：角度與距離如何限制數量？

等角直線問題問：在 n 維實向量空間中，若每兩條無向直線的銳角相同，最多可以有多少條？每條線選一個單位代表向量後，條件成為不同向量內積的絕對值皆為 α 。記 $M_\alpha(n)$ 為固定 α 的最大條數， $M(n)$ 則允許選擇角度。球面二距離問題記為 $g(n)$ ：單位球面上的點，彼此只出現兩種距離，最多有多少個？因為 $\|x-y\|^2 = 2-2\langle x, y \rangle$ ，這也等價於只有兩種不同內積。

從計算表看見可證明的規律

既有半正定規劃 (SDP) 計算中，276、1128、3160、7140 等上界反覆出現在不同維度。它們恰好是 $d(d+1)/2$ ，其中 $d=23、47、79、119$ ，又可寫成 a^2-2 ，對應 $a=5、7、9、11$ 。作者的問題是：這些重複數字能否由一個解析公式統一解釋，並延伸到任意大的參數？本文的貢獻是選擇少量 SDP 限制，將最佳化問題化成可手算的不等式證明。

主定理：固定角度上界跨越整段維度

對 $a \geq 3$ ，若整數維度滿足 $a^2-2 \leq n \leq 3a^2-16$ ，則 $M_{1/a}(n) \leq (a^2-2)(a^2-1)/2$ 。 a 是共同內積絕對值的倒數。例子包括： $a=3$ 時，7 至 11 維的上界皆為 28； $a=5$ 時，23 至 59 維的上界皆為 276； $a=7$ 時，47 至 131 維的上界皆為 1128。這些是固定角度的上界，不可直接把 $M_{1/a}(n)$ 換成 $M(n)$ ，也不可由上界逕自推論達界構造存在。

與經典上界的關係

Gerzon 界給 $M(n) \leq n(n+1)/2$ ，可由對稱矩陣 $x_i x_i^T$ 的線性獨立性證明。相對界則在 $n\alpha^2 < 1$ 時給 $M_\alpha(n) \leq n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ 。代入 $\alpha=1/a$ 、 $n=a^2-2$ ，恰得到主定理的常數。本文把這個數值延伸到更高維，甚至跨過相對界分母的零點。這正是新結論的特色：在一段維度區間內，即使環境空間增大，上界也不需要增大。

證明設定：把六個變數合成三個

SDP 利用三個向量間的內積關係，建立非負計數變數與半正定核矩陣。令 $A=(x_1+x_2)/3$ 、 $B=x_3+x_5$ 、 $C=x_4+x_6$ ，目標為最大化 $1+A$ 。二乘二矩陣 W 的兩列是 $(1, A)$ 與 $(A, A+B+C)$ ，因此 $\det W \geq 0$ 給 $A(A-1) \leq B+C$ 。作者另保留對稱化核 S_1 、 S_3 各一個對角元素的非負條件。刪去其他限制雖擴大可行集合，但最大化所得值仍是有效上界。

等角直線與球面二距離集合的新上界

Wei-Hsuan Yu (2017) | 兩頁中文導讀 | 證明與結構

關鍵消去：配平兩個變數的係數

先考慮奇數 $a \geq 3$ ，令 $\alpha = 1/a$ ，並在整數端點 $n_0 = 3a^2 - 16$ 計算。兩個核限制化為 $A + pB + qC \geq 0$ 與 $A + \alpha B / (1 + \alpha) + \alpha C / (\alpha - 1) \geq 0$ 。選適當正數 t ，把第二式乘 t 加到第一式，使 B 、 C 的係數同為 $c < 0$ ，得到 $(t+1)A + c(B+C) \geq 0$ 。由 $B+C \geq A(A-1)$ 及 $c < 0$ ，遂有 $0 \leq (t+1)A + c(B+C) \leq (t+1)A + cA(A-1)$ 。符號方向是整個證明不能省略的重點。

解析化簡與一個精確分數例子

$A=0$ 時結論立即成立； $A>0$ 時除以 A ，再代入原文的 t 、 c 公式，得到 $A \leq (1-3\alpha^2)/(2\alpha^4)$ ，故 $1+A \leq (1-2\alpha^2)(1-\alpha^2)/(2\alpha^4)$ 。改寫 $\alpha = 1/a$ 就是主定理。以 $a=5$ 為例， $t=1/684$ 、 $c=-5/1368$ ，算得 $A \leq 275$ ，因此最多 276 條。低維配置可補零嵌入端點維度，故上界向下適用。若 a 不是奇整數，可另用 Neumann 的 $M(n) \leq 2n$ ；因 $a^4 - 15a^2 + 66 > 0$ ，也得到所需上界。

球面二距離集合：多加一維的代價

若兩個內積 β 、 γ 的和非負，既有結果已給點數不超過 $n(n+1)/2$ 。若 $\beta + \gamma < 0$ ，取原空間外的單位向量 e ，將 x 送到 $y = tx + \sqrt{1-t^2}e$ ，其中 $t^2 = 2/(2-\beta-\gamma)$ 。新向量仍是單位向量，兩個內積的和變成零，因此形成 $n+1$ 維等角配置。於是 $g(n) \leq \max\{M(n+1), n(n+1)/2\}$ 。另一方面，正單純形邊中點正規化提供 $n(n+1)/2$ 個點，讓合適的上界直接確定最大值。

本篇解決的範圍與例外

結合上述方法、既有結果與 SDP 數值估計，本篇得到：對 $7 \leq n \leq 417$ ，除了 22、46、78、118、166、222、286、358 外， $g(n) = n(n+1)/2$ 。這些排除維度具有 $(2k+1)^2 - 3$ 的形式。排除不表示全部未知，例如原文已指出 $g(22) = 275$ 。數值上， $M(418) \leq 86284$ 足以與 $417 \times 418/2 = 87153$ 比較；但表中的 $M(419) \leq 88808$ 高於 $418 \times 419/2 = 87571$ ，因此這估計不足以決定 $g(418)$ 。此處引用原文表格，未重新執行 SDP。

閱讀價值與來源

本文示範如何讓數值規律指引解析證明：辨認參數、選少量核限制，再用係數配平消去輔助變數。它也提醒讀者分清固定角度與全角度、上界與構造、環境維度與真實張成維度。第 4 節的延伸猜想應依原文的歷史脈絡閱讀。本文依 arXiv:1609.01036v1 (2016) 編寫，不作 2026 年最新進展的宣稱。期刊書目：W.-H. Yu, New bounds for equiangular lines and spherical two-distance sets, SIAM Journal on Discrete Mathematics 31(2) (2017), 908–917。

新相對上界與緊調和指標 4 設計的不存在性

arXiv:1409.6995v1 (2014) | 兩頁中文導讀

研究問題與主要結論

球面調和指標 4 設計是單位球面上的有限點集 X ，要求每個四次齊次調和多項式在 X 上的總和為零。它不必滿足一至三次的矩條件。已知點數下界為 $(n+1)(n+2)/6$ ，達到等號才稱緊設計。Okuda 與 Yu 證明：環境維度 $n \geq 3$ 時，緊調和指標 4 設計不存在。這不是排除所有此類設計，而是排除下界取等號的極端配置。

二維例外與固定角度轉換

$n=2$ 時，取圓上的角度 $0, \pi/4$ 兩點， $\cos 4\theta$ 的總和與 $\sin 4\theta$ 的總和都為零，恰好達到兩點下界。高維緊性則迫使不同點的內積為 $\pm\alpha$ ，其中 $\alpha^2=3/(n+4)$ ，所以點集同時構成固定角度的等角直線系統。先前結果把 $n \geq 3$ 的剩餘候選限制成 $n=3(2k-1)^2-4, k \geq 3$ ，角度參數 $\alpha=1/(2k-1)$ 。

經典相對界為何不足

等角直線的一般 Gerzon 上界為 $n(n+1)/2$ ；固定角度的 Lemmens–Seidel 相對界為 $n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ ，但要求 $n\alpha^2 < 1$ 。在候選族中 $n\alpha^2=3-4/(2k-1)^2 > 1$ ，因此經典相對界不能使用。把負分母公式當成有效上界是不合法的。作者改由三點 SDP 的必要條件推導適用於另一參數區間的新界。

新相對上界與精確條件

設 $D_-= (n-2)\alpha^2+6\alpha-3$ ， $D_+= -(n-2)\alpha^2+6\alpha+3$ 。若 $n \geq 3, 0 < \alpha < 1$ 且 D_-, D_+ 都嚴格為正，則 $M\alpha(n) \leq 2 + [(n-2)/\alpha] \max\{(1-\alpha)^3/D_-, (1+\alpha)^3/D_+\}$ 。等價的維度條件是 $2 - (6\alpha-3)/\alpha^2 < n < 2 + (6\alpha+3)/\alpha^2$ 。這是開區間，端點分母為零，不能直接套用；兩個分支必須取最大值。

把設計所需點數壓到上界之外

代入 $n_k=3(2k-1)^2-4, \alpha_k=1/(2k-1)$ ，作者得到 $M\alpha_k(n_k) \leq B_k=2(k-1)(4k^3-k-1)$ ，對每個 $k \geq 2$ 成立。緊設計需要 $T_k=(n_k+1)(n_k+2)/6$ 點，而差值可分解為 $T_k-B_k=2(k-1)(2k-1)(4k^2-4k-1) > 0$ 。於是所有先前剩下的候選都矛盾。例如 $n=71$ 需要 876 點，但新上界只有 416。

新相對上界與緊調和指標 4 設計的不存在性

arXiv:1409.6995v1 (2014) | 兩頁中文導讀

從完整 SDP 取出足夠的限制

原始 Bachoc–Vallentin 型 SDP 使用六個非負三點分布變數、計數矩陣、兩點線性限制與各階矩陣核。本篇沒有求解全部條件，而只保留計數矩陣行列式非負，以及一個核矩陣對角元素 $(S_3^n)_{1,1}$ 非負。這會擴大可行域、可能弱化上界，但若留下的限制已足以證明不存在性，就不需要更多條件。

合併變數後的第一條不等式

令 $u=(x_1+x_2)/3$ 、 $v=x_3+x_5$ 、 $w=x_4+x_6$ ，目標線數為 $1+u$ 。計數矩陣是 $W=[[1,u],[u,u+v+w]]$ ，所以 $\det W \geq 0$ 等價於 $v+w \geq u(u-1)$ 。這是直接展開二階行列式得到的限制，不涉及數值最佳化或近似證書。所有合併變數都非負。

第二條不等式來自一個核元素

用原文 Lemma 3.4 的明確公式，約去公共正因子後得到 $Cu - Av - Bw \geq 0$ ，其中 $C=(n-2)(1-\alpha^2)^3/\alpha$ ， $A=(1-\alpha)^3 D_+$ ， $B=(1+\alpha)^3 D_-$ 。主定理條件使 A 、 B 都正。令 $m=\min\{A,B\}$ ，由 $v,w \geq 0$ 得 $Cu \geq m(v+w) \geq mu(u-1)$ 。若 $u > 0$ ，可除以 u ，得到 $1+u \leq 2+C/m$ ； $u=0$ 則直接成立。

代數化簡完成主定理

由 $C/\min\{A,B\} = \max\{C/A, C/B\}$ ，再用 $(1-\alpha^2)^3 = (1-\alpha)^3(1+\alpha)^3$ 約分，就得到兩分支的新相對界。若 $\alpha=1/l$ 、 $n=3l^2-4$ ，兩分式簡化為 $(l-1)^2/6$ 、 $(l+1)^2/6$ ，後者較大；外部 $n-2=3(l^2-2)$ ，因此得到可以對任意 l 手算的公式。取 $l=2k-1$ 即為推論的四次多項式上界。

方法價值與來源

本篇示範如何把 SDP 的結構濃縮成兩條簡單不等式，將早期有限維數值觀察提升成覆蓋無窮候選族的解析證明。核的正規化不可與其他版本混用；作者也未聲稱完全解釋為何所選核分量特別有效。來源：T. Okuda and W.-H. Yu，arXiv:1409.6995v1 (2014)；期刊版 A new relative bound for equiangular lines and nonexistence of tight spherical designs of harmonic index 4，European Journal of Combinatorics 53 (2016), 96–103。

研究問題：兩種距離與均勻能量

框架容許比基底更多的向量，用冗餘係數表示訊號。若 N 個單位向量 x_i 位於 n 維實空間，且對任意 x 都有 $\sum |\langle x, x_i \rangle|^2 = (N/n) \|x\|^2$ ，就稱單位範數緊框架。本篇再要求不同向量內積只有 a 、 b 兩種，研究這種幾何配置能如何完整分類。主要假設是非等角： $a \neq -b$ ，且兩種內積確實不同。

主要成果與適用範圍

作者證明非等角二距離緊框架必來自強正則圖的球面嵌入。它或者本身是球面 2-design，或者平移、縮放後成為低一維的球面 2-design。固定強正則圖的譜分解給三個中心設計與相應的三個提升，共六種構造，其中含正則單純形的一距離退化情形。不能將這個數量誤讀成跨不同圖永遠有六個互不全等的嚴格二距離配置。

Gram 矩陣揭露緊框架結構

令 $G_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ 。緊性等價於 $G^2 = (N/n)G$ ，因此 G 的非零特徵值全部是 N/n ，重數為 n 。框架勢能 $FP = \text{tr}(G^2)$ 至少 N^2/n ，等號也恰好刻畫緊框架。這些矩陣條件把看似無窮多個方向的能量要求，化成一個可以直接驗證的平方恆等式。

非等角假設迫使正則性

設第 i 個向量有 k_i 個內積 a 的鄰居。由 $(G^2)_{ii} = N/n$ ，可得 $1 + k_i a^2 + (N-1-k_i)b^2 = N/n$ 。因 $a^2 \neq b^2$ ，解出 $k_i = [N/n - 1 - (N-1)b^2] / (a^2 - b^2)$ ，與 i 無關。因此以內積 a 定義的圖是正則圖。這個整數度數也是參數存在性的必要條件。等角時分母消失，翻轉向量可改變正內積度數，故不能省略假設。

重心只有兩種可能

正則性使 $G1 = t1$ ，而 G 只有 0 、 N/n 兩種特徵值，所以 t 也只能取這兩值。 $t=0$ 時， $\|\sum x_i\|^2 = 1^T G 1 = 0$ ，重心為零，配合二次矩條件得到球面 2-design。 $t=N/n$ 時，令 $c = (\sum x_i)/N$ ，則 $\|c\|^2 = 1/n$ 。所有向量位於共同超平面，平移 c 並除以 $\sqrt{(1-1/n)}$ ，便得到正交補上的 $n-1$ 維球面 2-design。

為何圖不只正則，而且強正則？

令 A 是內積 a 的鄰接矩陣，則 $G=(1-b)I+(a-b)A+bJ$ 。將它代入 $G^2=(N/n)G$ ，利用正則性給 $AJ=JA=kJ$ 與 $J^2=NJ$ ，可解出 A^2 位於 I 、 A 、 J 的張成空間。 A^2 的非對角元素就是共同鄰居數，因此只依賴該頂點對是否相鄰：相鄰者統一為 λ ，非相鄰者統一為 μ 。這正是強正則圖的定義。

投影構造所有球面嵌入

強正則圖的標準分解是平凡空間 $E_0=\text{span}\{1\}$ 與兩個非平凡空間 E_1 、 E_2 。把標準基底投影到 E_j ，再正規化，可得到球面嵌入。投影 P_j 的對角都是 n_j/N ，故 Gram 矩陣為 $(N/n_j)P_j$ 。任意球面嵌入可寫成三個互相正交嵌入的加權和，平方權重非負且總和為一；在兩內積參數平面上，這對應由三個線性正半定條件圍成的三角形。

設計條件使連續權重變成有限選擇

中心設計要求平凡分量為零。若只使用 E_1 或 E_2 ，得到兩種純投影設計；若兩者都使用，緊性要求平方權重為 $n_1/(N-1)$ 、 $n_2/(N-1)$ ，結果是正則單純形，所有非對角內積相同。每個 d 維中心設計還能提升成 $x_i=(\sqrt{[d/(d+1)]}y_i, 1/\sqrt{d+1})$ ，其新內積為 $(d\langle y_i, y_j \rangle + 1)/(d+1)$ 。這完成非零重心分支。

可手算的十點例子

三角圖 $\text{SRG}(10,6,3,4)$ 是 K_5 的邊相交圖。其四維投影產生十個向量，內積為 $1/6$ 、 $-2/3$ ，每點有六個第一類鄰居。這也可看成四維正單純形的邊中點。將它依提升公式放到五維，新內積分別成為 $1/3$ 、 $-1/3$ ，因此得到十向量的等角緊框架。此例顯示非等角中心設計可以提升成等角配置。

研究意義與來源

本篇以譜與矩條件連結框架理論、球面設計及代數圖論。若實作構造，可直接檢查單位對角、內積種類、Gram 平方恆等式與重心，並注意退化或重複點。來源：A. Barg, A. Glazyrin, K. A. Okoudjou, W.-H. Yu, Finite two-distance tight frames, arXiv:1402.3521v3 (2015)。導讀依此作者版本的定理編號與構造說明。

等角直線的新上界

arXiv:1311.3219v3 (2014) | 兩頁中文導讀

問題與兩種最大值

在 n 維實空間中，若任意兩條直線的銳角都相同，選取單位代表向量後，其不同內積只能是 $\pm\alpha$ 。固定 α 的最大線數記為 $M\alpha(n)$ ，允許角度改變則記為 $M(n)$ 。兩者必須區分：某一角度有很強的上界，並不代表其他角度也受同一個數字控制。換向只改變代表向量，不改變原本的直線。

本篇的主要成果

Barg 與 Yu 以半正定規劃證明 $24 \leq n \leq 41$ 時 $M(n)=276$ ，並證明 $M(43)=344$ 。既有的 23 維 276 線構造可嵌入更高維度，另有 43 維 344 線構造；新上界與這些下界相合，因而得到精確最大值。對固定 $\alpha=1/5$ ，原文得到 $23 \leq n \leq 60$ 時 $M_{1/5}(n)=276$ 。這個固定角度結果不等於確定所有相同維度的全局最大值。

經典上界及其限制

Gerzon 界為 $M(n) \leq n(n+1)/2$ ，可由秩一投影 xx^T 在對稱矩陣空間中的線性獨立性理解。固定角度時，Gram 矩陣的跡與秩不等式給相對界 $M\alpha(n) \leq n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ ，但必須有 $n\alpha^2 < 1$ 。若分母非正，不能仍把該式當上界。這些基準在不少維度離已知構造很遠，因此需要更細的幾何一致性限制。

整數性使角度變成有限清單

當線數 $N > 2n$ ，Neumann 定理迫使 $1/\alpha$ 為奇整數。再配合二距離集合的整數限制， $N > 2n+1$ 時可寫 $\alpha = 1/(2k-1)$ ，其中 $2 \leq k \leq \lfloor (1+\sqrt{(2n)})/2 \rfloor$ 。於是大配置只須檢查有限個角度，小配置則另外由門檻控制。這與一般二距離問題的連續參數不同，本篇不靠沿角度區間逐段建立 SOS 證書。

三點半正定規劃的內容

兩點 LP 記錄每點平均的 $\pm\alpha$ 鄰居數，利用 Gegenbauer 正核限制這些數量。三點 SDP 再記錄各種內積關係如何共同出現。對稱化後有兩種重複點與四種相異點類型，共六個非負變數；目標是 $1+(x_1+x_2)/3$ 。矩陣值核的正半定性與計數一致性把不可能的局部資料排除，得到通常比兩點 LP 更強的上界。

等角直線的新上界

arXiv:1311.3219v3 (2014) | 兩頁中文導讀

數值表如何閱讀

原文使用 CVX 與截斷參數 $p=5$ 。 $n=40$ 、 41 的全局上界為 276 ； $n=42$ 的 $\alpha=1/7$ 分支給 288 ，因此只得到 $276 \leq M(42) \leq 288$ ； $n=43$ 才再次上下界相合而得到 344 。這份導讀引用原文數值，沒有宣稱重新執行求解器。若要嚴格重現，應保存角度枚舉、模型、對偶可行性、精度與取整所需的裕度。

調和指標設計帶來特殊參數

調和指標 4 設計要求四次球諧函數的總和消失，與要求一至四次全部消失的通常球面 4-design 不同。緊情形與等角直線的連結導出 $\alpha^2=3/(n+4)$ 。若 $\alpha=1/q$ 、 q 為至少 3 的奇數，就有 $n=3q^2-4$ 。在這個參數族，作者建立解析 LP 上界 $M\alpha(n) \leq (n+1)(n+2)/6$ 。

解析 LP 的機制

令 G_k 為正規化 Gegenbauer 多項式。因 $G_k(-\alpha)=(-1)^k G_k(\alpha)$ ，可把兩類平均鄰居數取成相等，使奇次限制自動成立；偶次限制只約束兩者之和。有用的是 $G_k(\alpha)<0$ 的偶數 k ，其界為 $1+1/|G_k(\alpha)|$ 。取所有這些偶次的最小值刻畫固定角度 LP 的最優值，但這個放鬆最優值仍不必等於真實幾何最大值。

LP 可解析，SDP 仍可能強很多

在 $n=71$ 、 $\alpha=1/5$ ，四次核給 $G_4(\alpha)=-1/875$ ，故 LP 界為 876 ；原文 SDP 界則為 416 。另兩例是 $n=143$ 、 $\alpha=1/7$ 的 3480 對 1506 ，以及 $n=239$ 、 $\alpha=1/9$ 的 9640 對 3902 。這些比較固定同一維度與角度，清楚顯示三點一致性比兩點頻率多了實質資訊；所有數字仍是上界，不能自動當作已存在配置。

平台、猜想與研究價值

原文觀察若干固定角度上界的長平台，並據此提出構造猜想。上界的平坦區間不會自動產生下界，也不能把當年的猜想寫成今日已知構造。本篇的價值在於以整數性縮小參數清單，再讓三點 SDP 與解析 LP 互補。來源：A. Barg and W.-H. Yu, New bounds for equiangular lines, arXiv:1311.3219v3 (2014)；Contemporary Mathematics 625 (2014), 111–121。

球面二距離集合的新上界

arXiv:1204.5268v2 (2013) | 兩頁中文導讀

研究問題與自然構造

在 n 維單位球面上，若不同點之間只出現兩種內積 a 、 b ，等價於只出現兩種距離。最大點數記為 $g(n)$ 。最基本的構造是 n 維正單純形的所有邊中點，再以共同球心正規化，點數為 $n(n+1)/2$ 。兩條邊是否共享頂點決定兩種內積。一般調和上界是 $n(n+3)/2$ ，與自然構造相差 n ，因此找出精確最大值需要更強的方法。

本篇新增成果與歷史範圍

Barg 與 Yu 利用半正定規劃，證明 $n=23$ 及 $40 \leq n \leq 93$ 、 $n \neq 46, 78$ 時， $g(n)=n(n+1)/2$ 。結合前人成果後，7 至 93 維除 22、46、78 外皆有此等式。 $n=22$ 已知 $g(22)=275$ ，大於自然下界 253；46、78 則在本篇仍有差距。對 $n=94$ ，作者得到 $4465 \leq g(94) \leq 4492$ 。這份導讀說明 2013 年論文的結果，不把後續進展倒填進來。

先分幾何情況，再做最佳化

若 $a+b \geq 0$ ，Musin 的既有定理已給 $|X| \leq n(n+1)/2$ 。若兩個內積皆嚴格負，Rankin 界給至多 $n+1$ 點。因此主要計算只需處理 $a \geq 0$ 、 $a+b < 0$ 的部分。對點數至少 $2n+3$ 的二距離集合，Larman–Rogers–Seidel 定理使 $b=(ka-1)/(k-1)$ ，其中 k 是有限範圍內的整數。代入符號條件後， a 落在 $I_k=[0, 1/(2k-1))$ 。兩個連續參數因而縮減成有限個單參數族。

LP 只看兩點，SDP 再看三點

正規化 Gegenbauer 核滿足對所有點對求和非負。用 α_1 、 α_2 表示每點平均的兩類鄰居數，可最大化 $1+\alpha_1+\alpha_2$ ，並施加線性核限制，得到 Delsarte LP 上界。Bachoc–Vallentin 的 SDP 方法則利用固定一點的旋轉對稱性，建立矩陣值核 S_k 。對所有三點求和後矩陣半正定，故可把三點關係的一致性加入限制，比只保留兩點平均更強。

六個變數使問題可以計算

對二距離集合，對稱化三點只有六種類型：兩種重複點類型，以及四種相異三點的內積組合。以 $x_1, \dots, x_6 \geq 0$ 表示正規化計數，且 $x_1=3\alpha_1$ 、 $x_2=3\alpha_2$ ，目標仍為 $1+(x_1+x_2)/3$ 。再加上計數矩陣、各階 S_k 矩陣的正半定性與原有線性限制，就得到有限維 SDP。原文使用截斷階數 $p \leq 5$ ；更高階未觀察到改善，但這不等於證明所有高階限制皆冗餘。

球面二距離集合的新上界

arXiv:1204.5268v2 (2013) | 兩頁中文導讀

網格計算為何尚不足以證明？

固定 n 、 k 後，可沿 l_k 的細網格逐點求解 SDP，觀察最大值可能出現的位置。然而節點之間仍可能藏有峰值，圖形平滑並不能保證整個區間都受控制。原文因此轉向對偶問題：只要找到可行的對偶係數與正半定矩陣，就能用弱對偶給配置大小上界。真正要驗證的是可行性，而不是僅相信求解器回報的最優數字。

平方和把連續區間納入證書

代入 b 的仿射公式後，對偶限制成為 a 的一元多項式非負條件。在子區間 $[a_1, a_2]$ ，令 $a = (a_1 + a_2 x^2) / (1 + x^2)$ 。若 f 的次數至多 m ，則 $F(x) = (1 + x^2)^m f(a)$ 為多項式，且 f 在原區間非負等價於 F 在整條實軸非負。一元實非負多項式可寫成平方和，再以 $F = z^T Q z$ 、 Q 半正定及係數匹配等式表示。這便把無窮多個參數限制重新化為 SDP。

分段與 $n=23$ 的例子

同一組對偶係數若要涵蓋太長區間，可能比逐點最佳值更保守。作者將 l_k 分成小區間，各自求證書，再取所有上界的最大值。例如 $n=23$ 、 $k=3$ ，原文以 20 個子區間報告 276.5 的界。點數必為整數，因此該分支至多 276；合併所有其他分支並使用 276 點構造，得到 $g(23)=276$ 。這是引用原文結果，並非宣稱本次重新執行求解器或產生新的嚴格證書。

數值表必須搭配分支解讀

原表 $n=40$ 的 SDP 欄為 315，卻有 820 點的自然構造，兩者並不矛盾：315 是需要計算的負內積和分支之上界，整個問題要與非負和分支的 820 取最大值。因此全局精確值是 820。 $n=94$ 的 4492 則已超過自然下界 4465，留下 27 點差距。把表中的 SDP 欄直接當作無條件的 $g(n)$ 上界，是閱讀本篇最容易犯的錯誤。

研究價值與來源

本篇把幾何構造、距離比的整數條件、三點 SDP 與區間 SOS 結合，示範如何讓有限計算涵蓋連續的配置參數。若重現計算，應保存區間分割、對偶與 Gram 矩陣、係數殘差及正半定餘量，特別留意取整所需的安全裕度。
來源：A. Barg and W.-H. Yu, New bounds for spherical two-distance sets, arXiv:1204.5268v2 (2013)；
期刊版 Experimental Mathematics 22(2) (2013), 187–194。