

一杯茶，最遠能分到多少？

每個頂點是一杯茶

從一杯開始！

選連通集合，一起平均

總茶量不變

距離決定上限

最多 $\frac{1}{d+1}$

d ：到起點的距離

最短路徑，一次達界

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

距離 2 $\rightarrow$ 最多 $\frac{1}{3}$

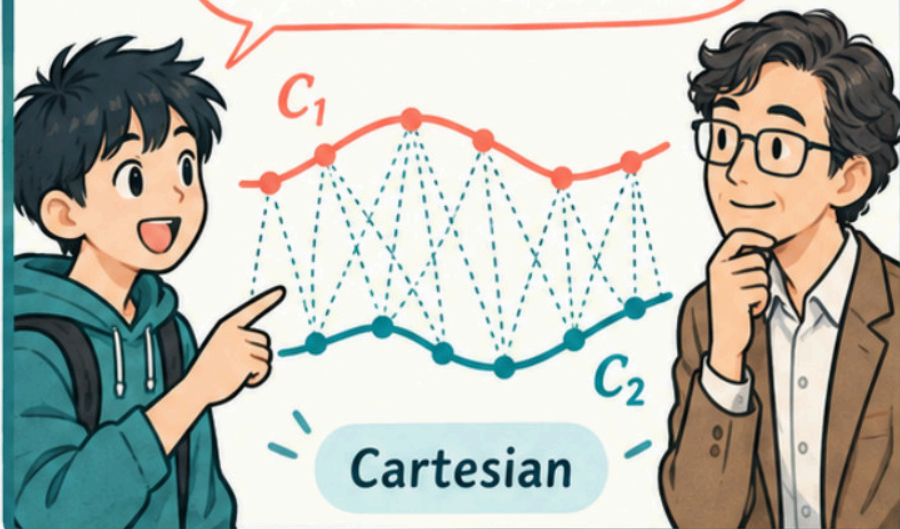
一般分享：可平均整個連通集合 | 依 arXiv:2405.15353v2

Good Tea, Greater Horizons ♡

多項式裡，藏著整片乘積嗎？

1

特殊結構，
可能容下所有配對！



2

一般多項式，
通常沒有這種退化。



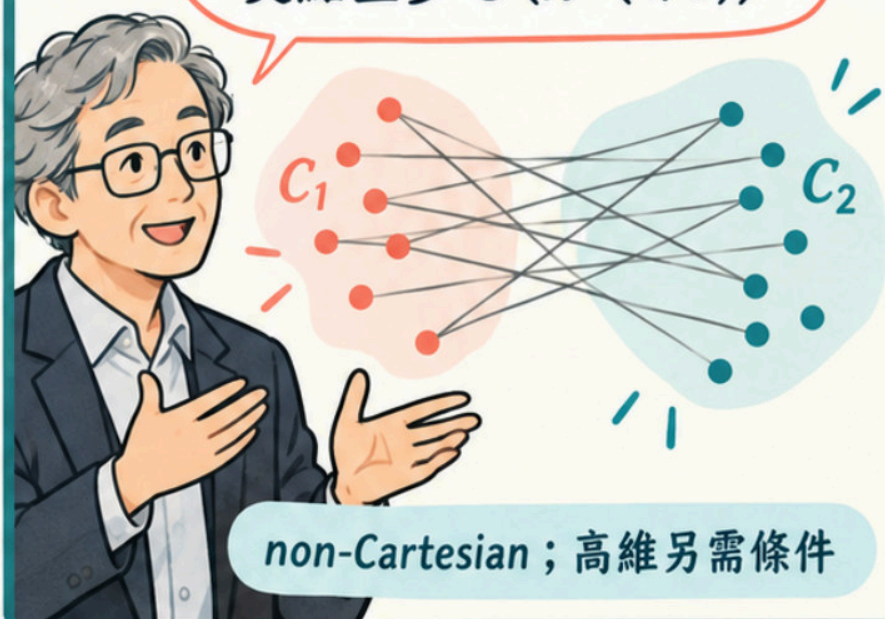
3

用纖維與代數方法
辨認結構。



4

兩塊 C^2 的平衡情況：
交點至多 $O(n^{4/3})$ 。



15個矩陣，剛好達到上界

1 找互不偏的伙伴

每個矩陣內要正交，
彼此也要相容！

好問題
好伙伴
走得更遠！
😊

元素示意

0 +1 -1

元素示意

0 +1 -1

元素示意

0 +1 -1

元素示意

0 +1 -1

矩陣

組合設計

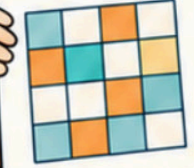
合作

2 用組合工具搜尋

構造與搜尋，一起找新例子。

From
Structure
to
Discovery
💡

拉丁方 示意



三元碼



clique搜尋



組合

圖論

電腦搜尋

新例子

3 找到15個16階矩陣

每個重量9，
所有配對都通過！

小小構造
大大可能
😊

$W(16,9)$

完整矩陣見附件

15個矩陣

Good
Matrices
Brighter
Tomorrows
😊

4 下界碰上上界

最優性確定了！

構造： $f \geq 15$

上界： $f \leq 15$

最大值：**15**

數學
讓世界
更美好
😊

Good
Ideas
A More Open
Tomorrow
😊

構造與搜尋

上界與下界

持續探索

兩種距離，一把譜尺



三角格點的距離挑戰



在對稱中
尋找秩序
——數學真美！

把球面設計，切成三層

幾何・組合・代數
看見更深的結構

Small sets
Big ideas!

1

Sphere Design

Symmetry
Structure
Beautiful
Mathematics

從球面
看見更大的
數學世界

存在非零方向，
讓投影只有 $0, \pm 1$?

球面被切成三層：
上層（紅）・赤道（青）・下層（紅）

Geometry
Combinatorics
Lattices

Ideas
Connect
People

2

Moments
on S^{n-1}

✓ Symmetry
✓ Constraints
✓ Layer structure

球面矩條件，
決定三層的大小。

矩條件
連結幾何
與代數

Harmonic Analysis
Orthogonal Polynomials
Design Theory

Good
Problems
Brighter
Tomorrows

3

Tight design
+
Minimal type
 $\Rightarrow$
Equiaugular
Tight Frame
(ETF)

tight 且為 minimal type：
赤道一半給出 ETF!

對稱之下
藏著最美的
結構

從赤道點中選一半，
與其反足點配對

Frame Theory
Spherical Designs
Linear Algebra

Math
Makes
Connections

4

Combinatorics
+
Lattice theory
 $\Rightarrow$
Obstructions
(for certain
minimal type)

組合與格論，還能排除
某些 minimal type 構造。

Check:

- ✓ Combinatorial conditions
- ✓ Lattice constraints
- ✓ Feasibility
- ✓ Rule out certain minimal type structures

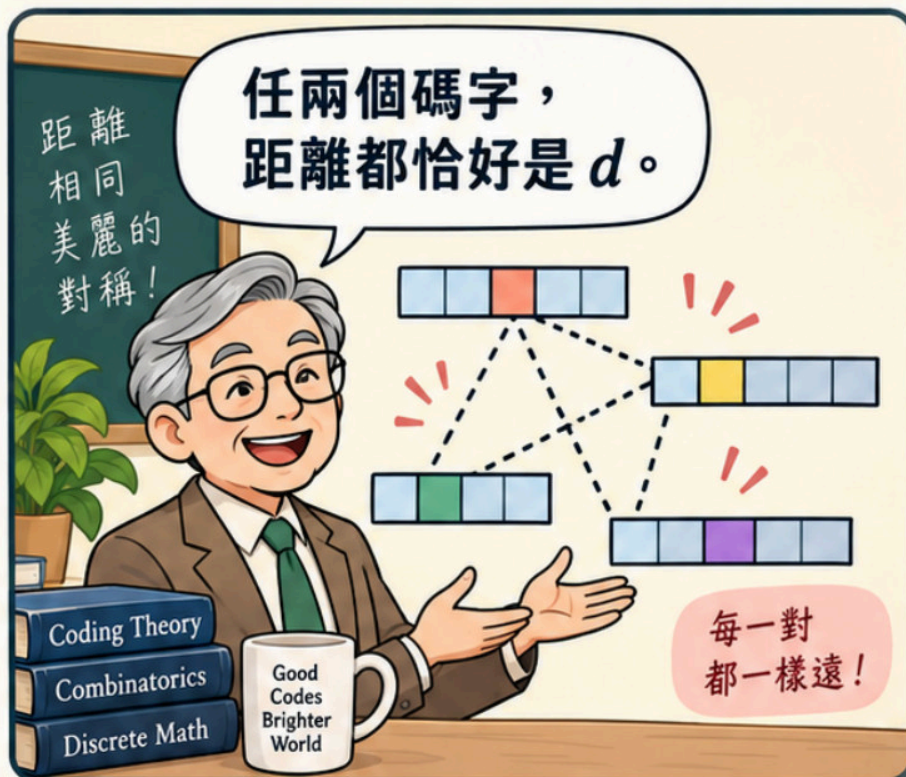
Not all cases,
but meaningful restrictions!

Combinatorics
Lattice Theory
Sphere Packings
Designs

Careful
Reasoning
Lasts Longer

更多的問號
通往更遠的
風景

等距碼：每對都一樣遠



數學，
讓隱藏的秩序
被看見。

45點的唯一性之謎

看似簡單的點，
藏著深刻的結構！

1 只有兩種距離

從少量規則
看見非凡的
整體。

八維放45點，
距離只有兩種！

45個點
(八維空間中)



點與距離
連結起
美麗的結構

2 點與區塊分兩組

關鍵是型別 (2,2;3)
的結構。

高維結構示意

不同的視角
看見
同一個美。

9點正單形

36個區塊



對稱性

結構

更大的圖景

3 幾何加上整數性

幾何給出限制
整數性收緊條件
兩者結合
逼近真相。

整數不可能
介於0與1之間！

距離方程

整數參數



4 唯一留下Lisoněk

結構
+
計
+
整
+
嚴
謹
論
證

在指定嵌入類別中，
只有這一例！

有時候
唯一的
答案
會悄悄浮現。

$$9 + 36 = 45$$

Lisoněk

幾何

組合

嵌入

美麗的必然

—— 唯一性有結構前提；並非所有45點二距離集合的完整分類。 ——

特定的框架下，
也能遇見獨一無二的美。

用特徵標讀懂量子對稱

1 張量空間太龐大

量子表示
張量空間
...

要怎麼分解
這些量子表示？

量子計算
群表示論
Clifford 群
張量積

2 群元素按共軛類整理

先製作特徵標表！

分類示意
三量子位元：
67個共軛類

● 示意A
● 示意B
● 示意C
● ...

第1類

第2類

第3類

其他類

共軛類
群的結構
特徵標表

3 加權內積算重數

分解不必費力
對稱自有方法

特徵標取羣 → 加權內積

	類1	類2	類3	...
X_1	■	■	■	...
X_2	■	■	■	...
X_3	■	■	■	...
...	...	...	...	...

不用直接拆巨大矩陣，
也能算出不可約重數。

成分A

成分B

成分C

...

4 看見量子對稱的結構

小量子位元有完整表格，
一般情形有結構定理！

對稱
結構
計算
新可能

看見結構
走向更大的量子世界

研

不可約表示
(基本積木)

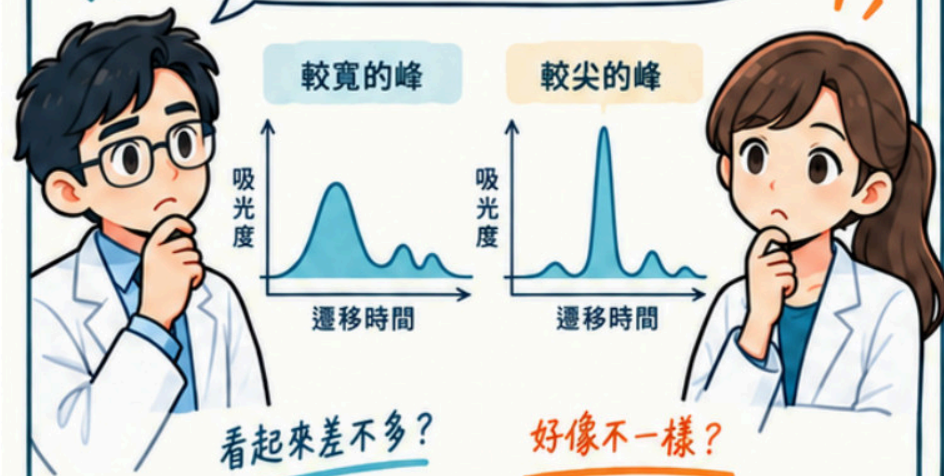
量子計算

血清電泳：把曲線變成數字

讓數據，
說更清楚的故事！

1 看圖也會有分歧

同一條曲線，怎麼比較？

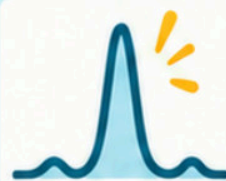


2 三種觀察角度

用公式描述形狀與訊號！



尖銳度



峰形是寬是窄
可量化

輕鏈比例



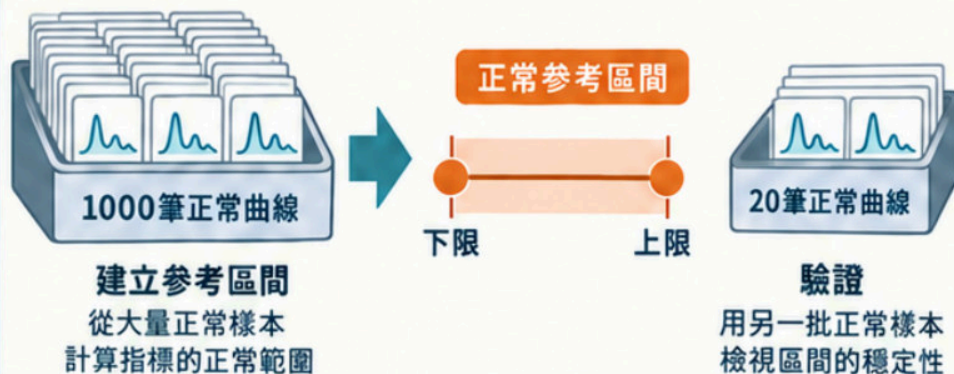
輕鏈κ/λ的
相對比例

Ig差值



原始曲線與抗血清
曲線的差值

3 建立參考區間



看新樣本是否落在範圍內。

讓數據
更可靠！

4 數字要讀對

這是正常樣本的
區間涵蓋率！



不等於
疾病診斷準確率。



可解釋的指標，仍需疾病族群與跨中心驗證。

理解極限
才能看見可能！

量子碼的極限：讓SDP來把關

更嚴謹的限制
讓量子通訊走得更遠！

1 共享糾纏，傳送量子態

Bob的夥伴先保護好，
只算Alice端錯誤。

預先共享糾纏

糾纏
是更強大的
資源！

雜訊

Alice

EA-CWS量子碼

Bob

同心傳遞
量子可能

2 錯誤作用要分清楚

可偵測

無害

不可偵測

不同的錯誤
有不同的影響，
但都值得被理解。

狀態
保持不變！

相對相位
(例如一個相位)

可偵測，
不是把量子態
消滅！

看見錯誤的本質
才知道如何防禦

錯誤作用要分清楚

3 用錯誤集合的三點關係增加限制

T_2 (較大的錯誤集合)

T_1 (較小的錯誤集合)

I	Z	I	X	Y
ZZ	XX	XZ	YZ	
...				

$T_1 \subset T_2$

T_1 是 T_2 的一部分；

T_2 減去 T_1 的錯誤不可偵測。

用錯誤集合的三點關係，
增加限制。

X
Z ← XZ

三個錯誤之間的關係
帶來更强的防制！

利用結構
看更更强的限制

SDP

錯誤結構
組合限制
SDP 方法
更緊的上界



4 研究結果：更緊的上界

作者報告的EA-CWS上界

$n = 10, c = 4, d = 4$

M 上界：144 → 140

太棒了！
上界變得更緊了！

排除太大的碼，
不是造出140維的嗎！

限制不是句點，
而是通往理解的起點。

更嚴謹的界限
引導未來的探索

量子編碼
理論與應用
通向更遠的未來

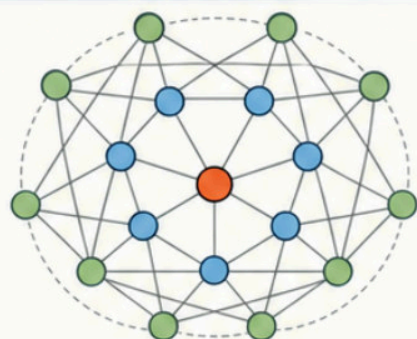


圖的對稱性，
通往優美的幾何。

從對稱圖找到等角直線

對稱帶來結構，
結構連結向量。

1 從高度對稱的圖開始

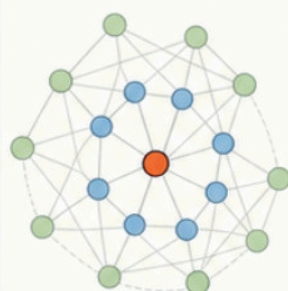


rank 3說的是
群作用！

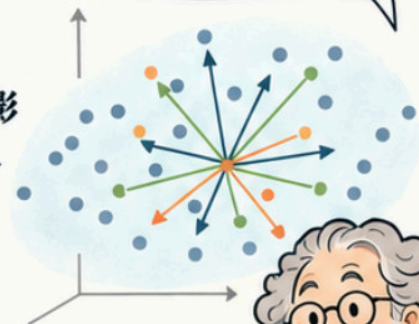
● 該點 ● 鄰點 ● 非鄰點

原來圖的對稱性
可以這樣分類！

2 投影到特徵空間



正交投影



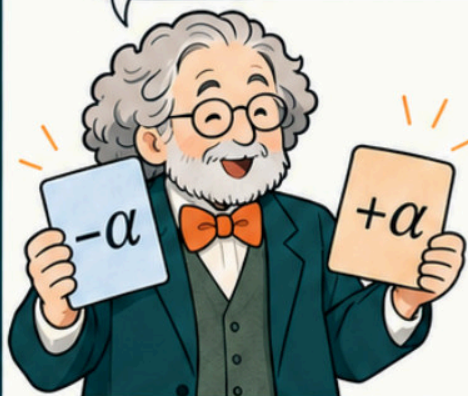
哇！原來圖可以
變成向量的雲！

對稱的結構
在特徵空間中
展現為漂亮的配置。

3 檢查兩種內積

絕對值相同，就得到等角緊框架！

只有兩種內積，
而且大小一樣！



例子：28個向量 · 7維空間 · 內積 $\pm 1/3$

4 完成指定來源的分類

範圍是primitive rank 3圖
的球面嵌入！



另有rank 3後裔圖的分類；
不是所有ETF的分類。

在對稱的地圖上，
遇見特別的向量世界。

三種距離，最多幾點？

思考 · 連結 · 發現

幾何
組合
優化

點與點之間，
只能有三種距離？

好問題
開啟新世界

23維已有2300點的構造！

每對反足點取一個

從對稱中
看見結構

幾何與和諧

半正定限制加平方和，
連取樣空隙也要檢查！

嚴謹
使直覺走得更遠

構造與上界相遇，
答案確定了！

問題有終點
探索無止境

數學
連接未來

幾何
分析
組合
優化

更美的問題
更大的世界

量測 × 結構 × 幾何
重建看不見的量子態

量子態重建：沿低秩曲面快步前進

從量測走向
更清晰的量子世界！



相同的量子系統重複準備 →

每個 Pauli 設定，多量幾次取平均。

$\rho = \begin{bmatrix} ? & \blacksquare \\ \blacksquare & ? \end{bmatrix}$

有限量測，仍有統計雜訊

先沿切空間，找下降方向。

利用幾何結構在低秩曲面上更有效率地前進！

切空間

低秩曲面 (量子態流形)

利用低秩結構

抓住最重要的結構，濾掉雜訊！

ρ 的奇異值分解

Σ

$V^\dagger$

保留最大的 r 個奇異值

截去較小的奇異值

選好步長，再截回低秩！

RGD 的一次更新

示意圖

收斂很快，但量測雜訊不會憑空消失。

雜訊底限

需要足夠取樣與小雜訊

更好的量測，帶來更好的重建！



從量測資料出發，
讓量子態逐漸清晰。

Hsu et al. · arXiv:2210.04717v1

幾何視角，連結理論與實驗
開啟量子科技的更多可能



小小的量測，
通往巨大的量子世界。

簡單的規則
蘊藏美麗的結構!

二元碼：只准兩種距離!

組合 × 幾何 × 最優性
數學就是這麼迷人!

1 限制所有碼字對

BINARY CODES
a simple idea, big questions!

不是最小距離!
是距離只有兩種。

不同
但有結構
That's the beauty!

Combinatorics
Geometry
Coding Theory

Good Codes Better Math

2 組合問題，幾何解法

搬到球面，
用等角線限制大小。

哇!

等角
⇒ 距離受限
⇒ 大小有界

同一個問題
兩種視角
組合 × 幾何
更強大!

**3 距離只有2或4，
剛好達到上界!**

太棒了!

漂亮的構造
精確的上界
恰到好處!

零向量

所有重量2的字

$n \geq 6$: 最大 $1 + \text{binom}(n, 2)$

Bounds
Constructions
Beautiful!

4 Johnson碼：構造 + 上界

原來如此!

固定共同核心，
再用LP證明最優。

共同核心

變動部分

多個已證範圍
(並非完全解決)
構造 · 上界
· 仍有開放問題

Johnson Codes
Linear Programming
Sphere Packings
Further Questions

好的數學，
讓可能的範圍
更清楚！

拆開座標，收緊上界

組合 × 優化
讓上界更緊！

1

編碼
距離
組合
上界
：

碼字彼此要夠遠，
最多能放多少？

長度固定
兩兩距離
至少 4
最多能放幾個？

這些限制
其實非常強！

2

分成兩區，看見
總距離藏住的細節！

把整體
拆開來看！



第一區座標

第二區座標

總距離 = 第一區的距離
+ 第二區的距離

同樣的總距離，
其實包含更細的限制！

3

大矩陣
↓
有結構的
小分塊
↓
可計算！

張量積分塊，
讓半正定限制算得動！

巨大的矩陣
(概念圖)

張量積分塊



組合設計
半正定規劃
張量積
上界方法

- ✓ 半正定規劃 (SDP)
- ✓ 張量積結構
- ✓ 分塊化計算
- ✓ 更緊的上界

4

檢查對偶誤差後：
上界是 **6551**！

$$A(18, 4) \leq 6551$$

上界，不是建構

雖然還不能
告訴你該怎麼構造，
但我們知道
不可能超過這個數！

數學讓我們
知道極限在哪裡！

- ✓ 原始可行解
- ✓ 對偶可行解
- ✓ 對偶誤差 OK
- ✓ 數值檢查完成

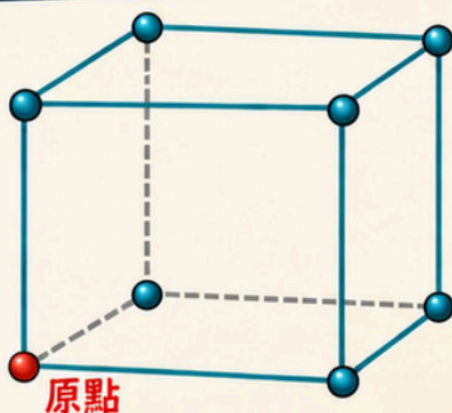
Better questions
Clearer limits
A more colorful math world!

Tseng · Lai · Yu | 2203.06568

More structure
Tighter bounds
Brighter understanding!

≡ 避開原點，也要蓋得剛剛好 ≡

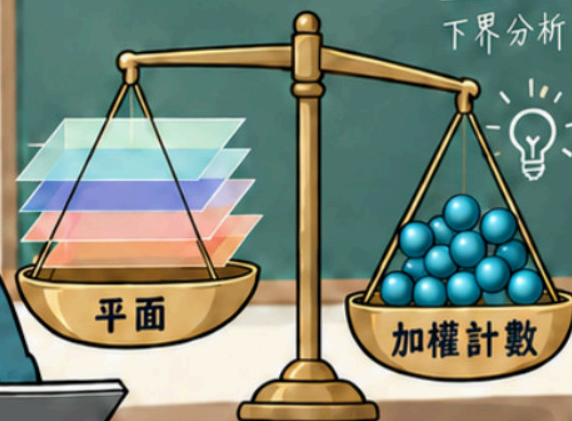
每個非零頂點，
至少被平面蓋 k 次！



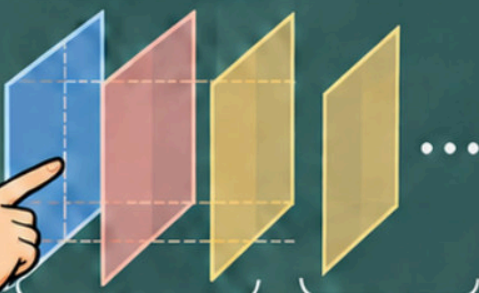
三維示意：平面須避開原點

加權計數，
先找最少需要多少平面。

對稱性
+
計數方法
下界分析



滿權重平面有明確結構；
其他至少差 $1/n$ ！



滿权重平面
(結構清晰)

其他平面
(至少差 $1/n$)

組合幾何
對稱性
覆蓋問題

六維：49 個平面，
每個非零頂點恰蓋 20 次。

避開原點
覆蓋剛好
構造完成！

六維超立方體
平面覆蓋構造



論文

構造已逐點核査。

不同類別
不同關係
同一個網路

小圖樣，看懂異質網路

不同的角色
連結出更豐富的世界
從小圖樣發現大結構！

1

節點和邊都有類別，
只數連線不夠！

人員
論文
機構
主題



不同類別的節點，
有不同的意義與關係！

2

找出小型誘導子圖：
graphlets。

從局部出發，
看見結構的線索。

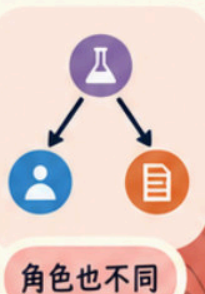


小小的結構，
也蘊含豐富的角色關係！

3

保留顏色與方向，
辨認對稱位置。

顏色和方向
提供更多線索，
幫助辨認節點在網路中的
對稱位置。



即使結構相同，
不同類別或方向，
也可能代表不同的角色！

4

把每個節點，
變成可比較的特徵向量。

把結構資訊
轉換成可比較的表示，
讓不同類別的節點
放在同一個特徵空間中。



複數球面設計

怎樣用少量點，
算準整個球面的
平均？

Geometry
Analysis
Computation
for a
Brighter
Understanding

實部+虛部：
換座標，幾何不變！

Same
Geometry
New
Perspective

(x_1, y_1)

$z_1 = x_1 + iy_1$

(x_2, y_2)

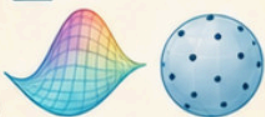
$z_2 = x_2 + iy_2$

實數座標

複數座標

精確性與均勻度，
都要照顧！

☒ 低次多項式精確



☒ 點不擠、空洞小



From
Spheres
to
Ideas

數值很接近零，
還不等於嚴格證明！

Good
Questions
Deeper
Mathematics

Residual
 ≈ 0

Proof

Theory
Computation
Rigour

1 先把影像準備好

從臨床問題到資料分析一起找到答案...♥

100 張影像，先由醫師裁出重點區域。

人工 ROI

醫師

CLINICAL
IMAGE
RESEARCH

Better Data
Brighter Healthcare

2 影像變成特徵

把影像資訊轉成可分類的數字!

影像區域 (ROI)

CNN 特徵

- 紋理特徵
- 形狀特徵
- 強度特徵
- ...

Ridge 分類器

Mathematics
Data Science
Better Society

Data x Medicine = A Healthier Tomorrow

3 分辨輕度與重度

輕度

重度

模型評估結果

平均 accuracy: 87.5%

重複五折交叉驗證

- ✓ 影像處理
- ✓ 特徵擷取
- ✓ 機器學習
- ✓ 交叉驗證

這是對醫師影像標註的分類表現。

小步前進
累積可靠的證據

4 有前景，仍需外部驗證

不是其他疾病的診斷結果!

A 醫院

B 醫院

C 醫院

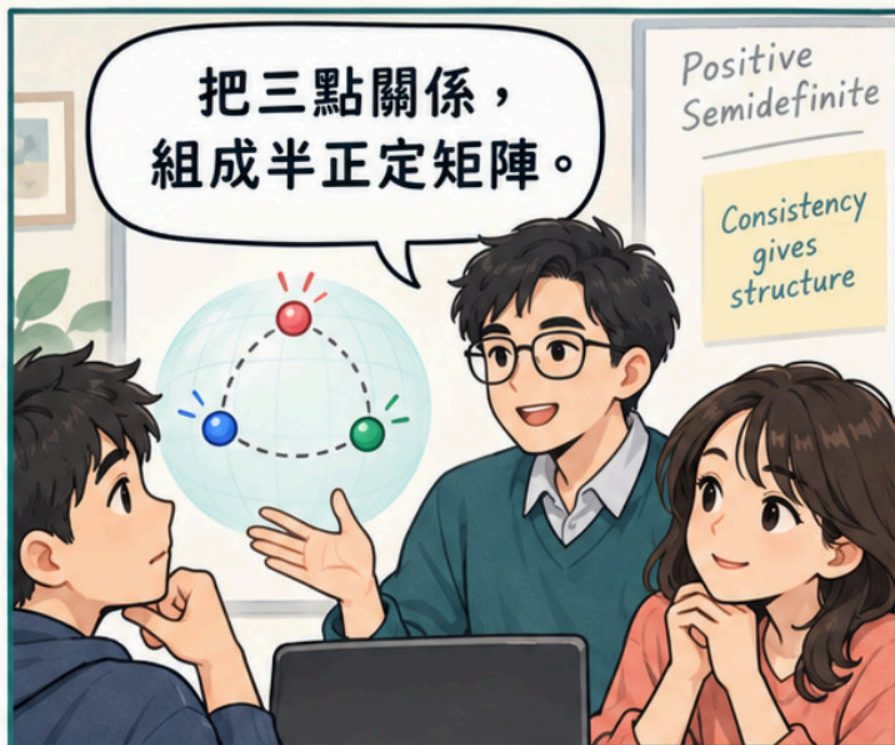
換醫院、換影像，還要再測試。

多一點驗證讓研究更可靠也更有幫助♥

合作
嚴謹
造福患者

不同專業 · 同一個更健康的未來

複數球面上的相容性



四個點，看出更強限制



1 從試驗方案找線索

11 項試驗，
每項是一筆資料。

研究
讓臨床更好



2 哪些穴位常一起出現？

這三個穴位在相同
5 項試驗中出現！

從資料
發現規律
打開新問題

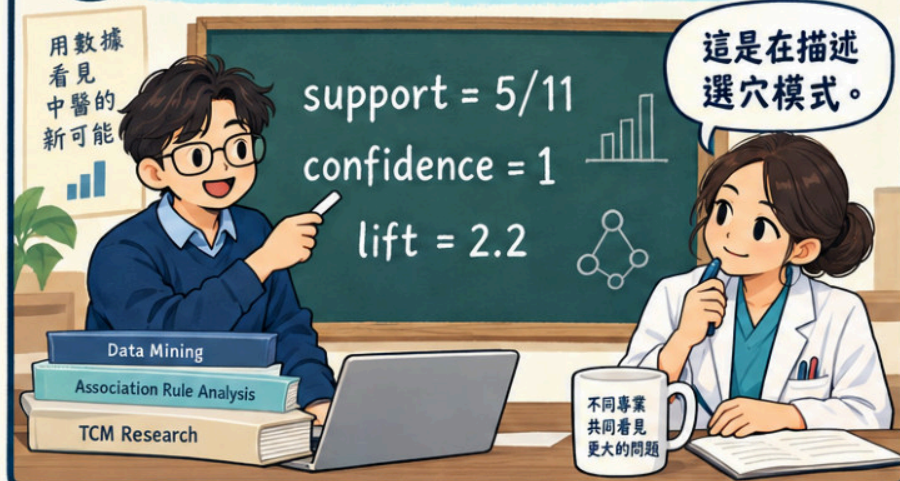


3 用數學衡量共現

用數據
看見
中醫的
新可能

$\text{support} = 5/11$
 $\text{confidence} = 1$
 $\text{lift} = 2.2$

這是在描述
選穴模式。



4 候選組合，還要驗證

常一起用，
不等於已證明有效！

下一步：
比較療效的
隨機試驗。

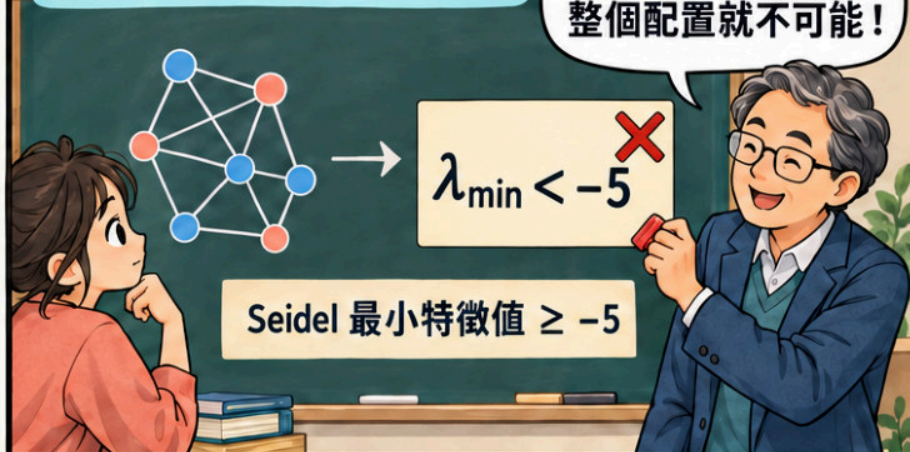
好問題
帶來
更可靠的
答案



固定角度，最多幾條？



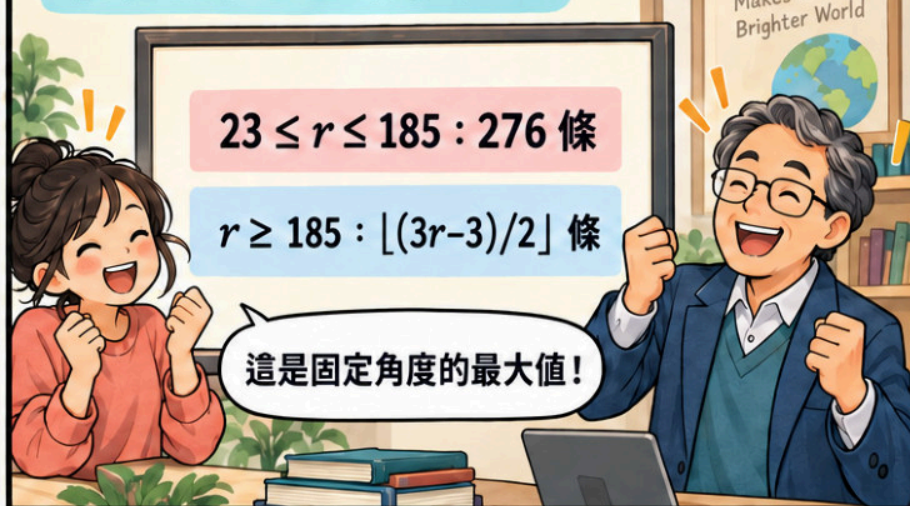
禁子圖先把關



柱分解，再用 gallery 串起來



猜想完整解決！



少距離集合的整數密碼



成雙的球面點，最多能放多少？

對蹠成雙

每個點，都有相反方向的伙伴！



限制更多

距離種類少，還要滿足平均條件。



找出冗餘

調和空間有重疊，不能重複計數！



上界更小

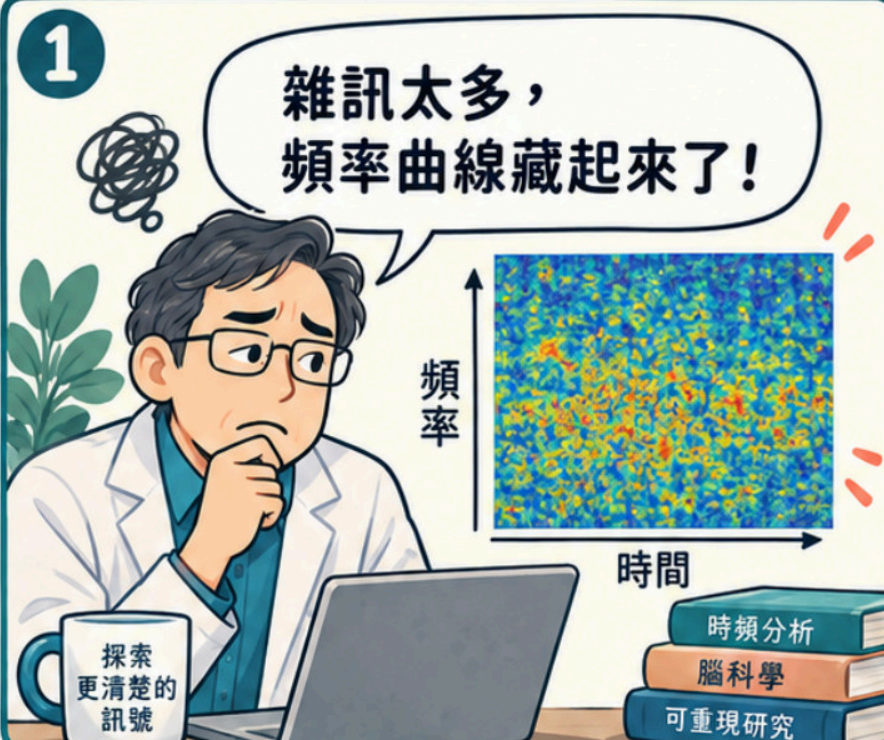
再用整數限制，排除不可能的點數。



球面設計，讓時頻分析更可重現

1

雜訊太多，
頻率曲線藏起來了！



頻率

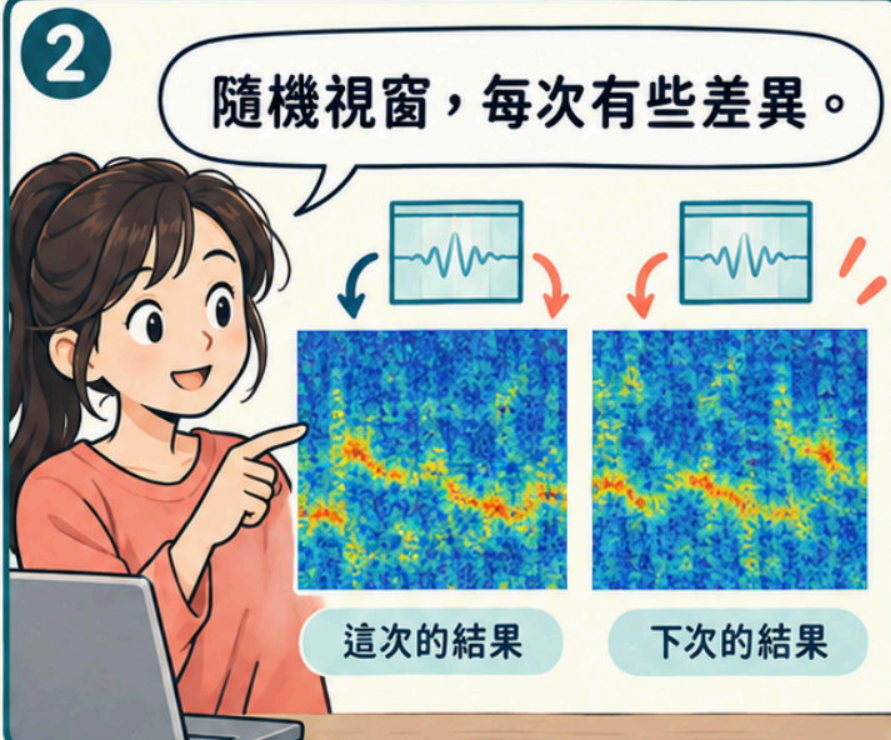
時間

探索
更清楚的
訊號

時頻分析
腦科學
可重現研究

2

隨機視窗，每次有些差異。

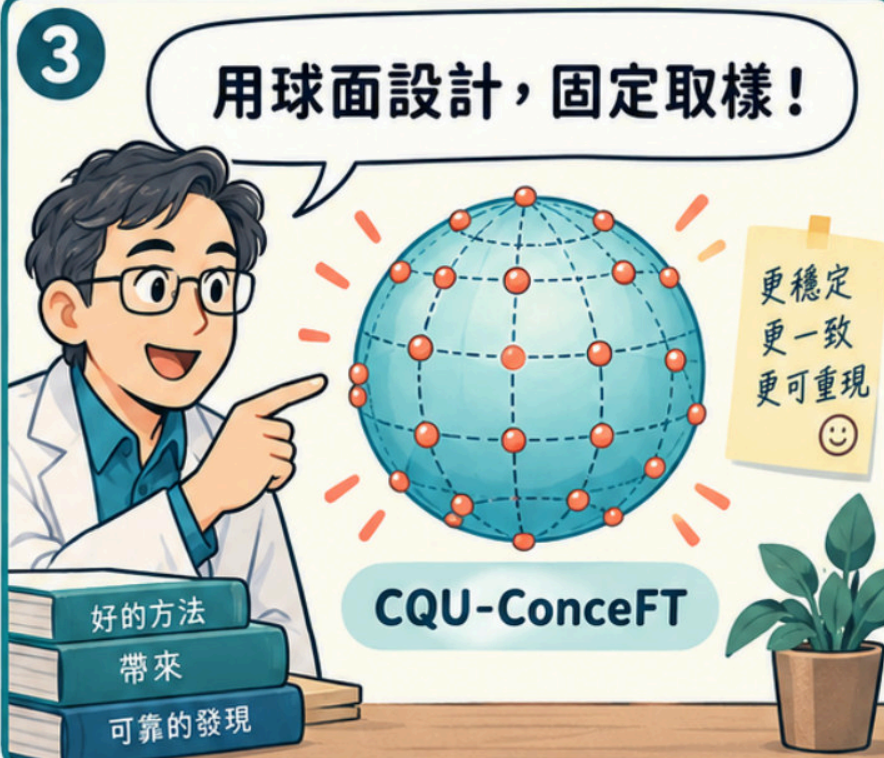


這次的結果

下次的結果

3

用球面設計，固定取樣！



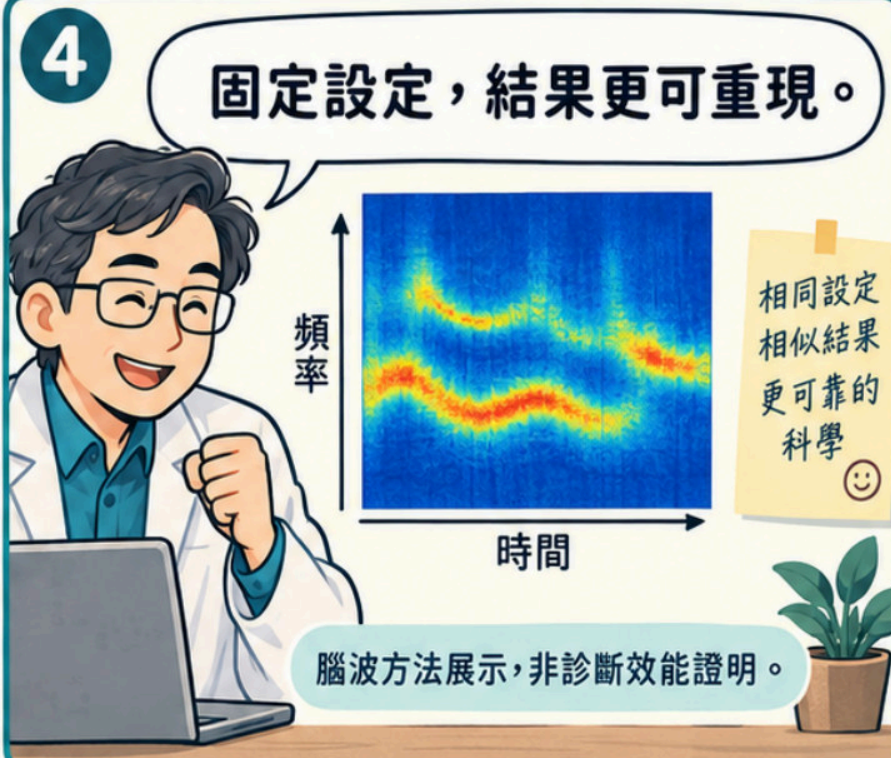
更穩定
更一致
更可重現

CQU-ConceFT

好的方法
帶來
可靠的發現

4

固定設定，結果更可重現。



頻率

時間

相同設定
相似結果
更可靠的
科學

腦波方法展示，非診斷效能證明。

球面上的點，為何只剩兩類？

兩種距離

只有兩種距離，
還要平均分布？



轉成整數問題

把距離與調和條件，
寫成圖的整數參數。



整數不能差一點

z 是整數，
 $|z| < 1$ ，
所以 $z = 0$



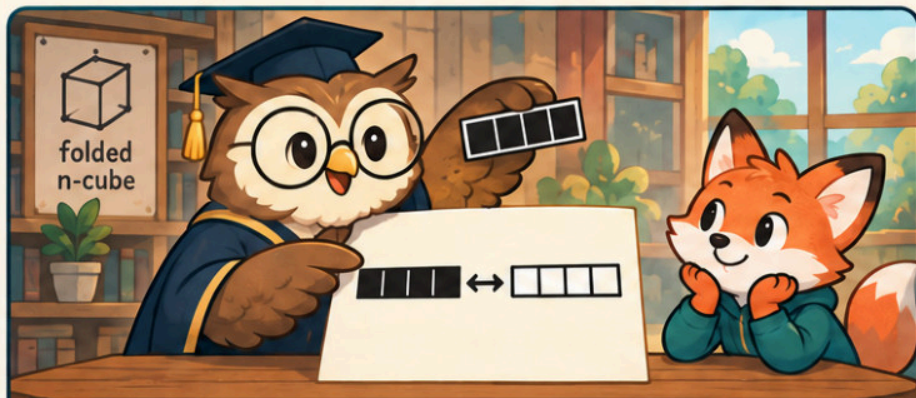
分類完成

符合條件的點集，
只會落在這兩類！

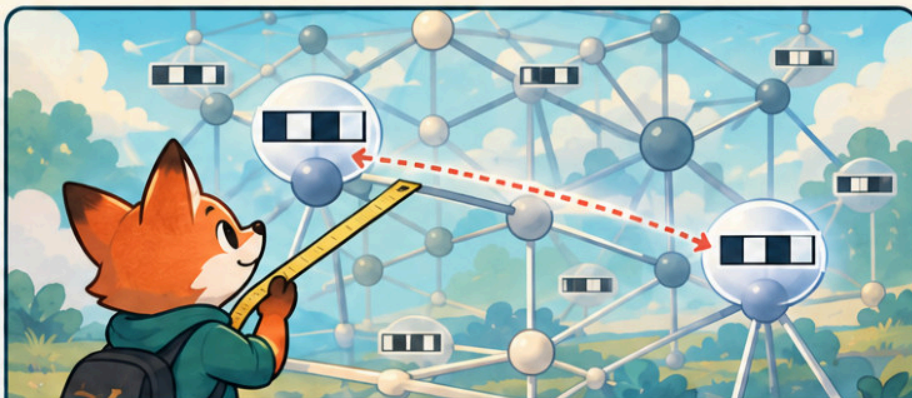


示意圖；第二類的一半須有零重心。參數可行不等於一定存在。

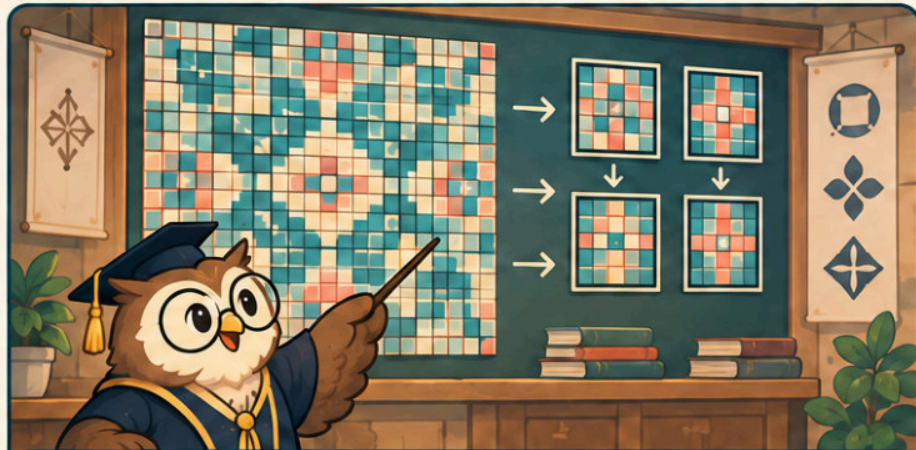
把大矩陣，拆成小問題！



互補的二元字串，在這裡算同一個點。



碼字必須保持足夠距離；最多能放多少？



利用對稱性，把大矩陣拆成小區塊。



半正定規劃，給出碼字數量的上界。

≡ 不能再加，不代表最多！≡



飽和是不能延伸；最大值選要比較所有配置。依據 Lin-Yu 論文。

等角直線：把大問題拆成柱子

1

每對直線，都有相同夾角。

對稱
和諧
美的結構

不論哪兩條直線，
夾角都一樣！

簡單的規則
蘊藏著
大問題

Lin

2

先找基底，再把直線分成柱子。

分解
是為了
看得更清楚

先找到合適的基底，
再把直線分成不同的柱子。

把複雜的整體
分成可研究的
小部分

$K=3$

$K=4$

$K=5$

幾何
組合
線性代數

3

投影與矩陣，限制每根柱子的大小。

投影
把高維的結構
變成可觀察的
影子

投影與矩陣，
會限制每根柱子的大小。

幾何的影子
矩陣
結構的限制

4

基底 3、5 得到證明；基底 4 仍是部分結果。

部分的答案
也是
前進的力量

$K=3$



得到證明

$K=4$



仍是部分結果

$K=5$



得到證明

有些問題
需要時間，
但每一點進展
都讓我們離真相
更近。

數學的旅程
一步一步

我們取得了重要的進展，
但整個猜想仍待進一步解決。

好問題
長遠的影響
繼續探索

遞迴規則，四種看法

每一步，都接著
前兩步！

封閉公式，
直接看第幾項。

看特徵根，
也要看初值。

還能計數字串、
連結微分與卷積！

遞迴 × 封閉公式 × 組合計數

少數距離，能容納多少點？



Glazyrin-Yu | 論文概念導讀

示意漫畫；完整假設與定理請見論文及簡介。

好問題，
開啟更大的數學風景。

指定階數，尋找最小設計



—— 幾何下界 × 等號條件 × 整數限制 ——

1 等角直線能有多少條？



2 計算表裡的規律



3 留下關鍵不等式



4 一個公式，涵蓋整段維度





POINTS
SYMMETRY
ABRIGHTER
MATHEMATICS

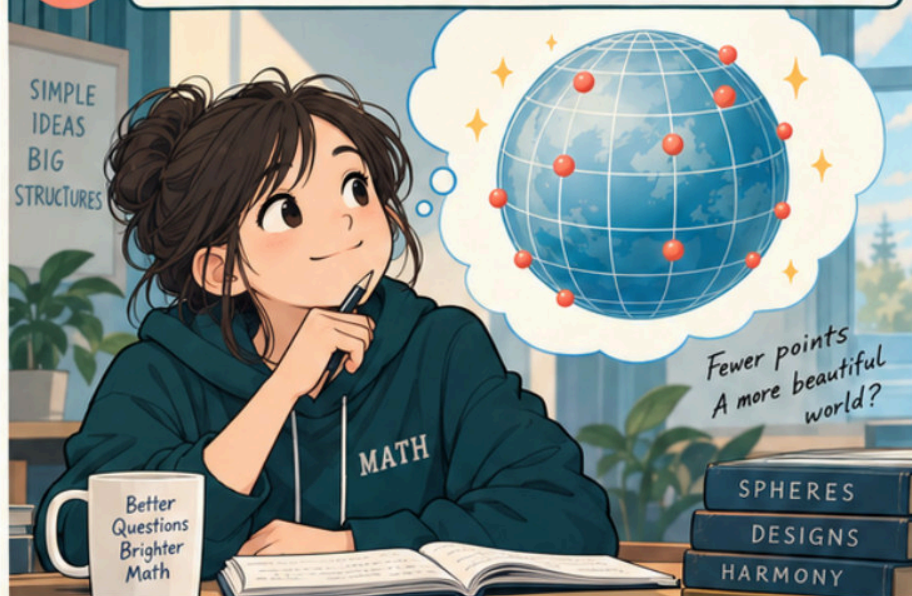
最省點數的設計，真的存在嗎？

Okuda-Yu (2016)

Good
Questions
Lead Further

1

想讓四次球諧矩抵消，又用最少的點！



2

若達到下界，就必須有固定等角結構。



3

新上界，竟比所需點數更小！



4

$n \geq 3$ ：不存在緊調和指標 4 設計。



兩條必要不等式 · 手算證明 · 二維有例外

MATHEMATICS
CONNECTS
IDEAS AND PEOPLE

Special Cases
Also Matter



簡單的結構
藏著深刻的幾何！

兩種距離，藏著一張圖

Finite two-distance tight frames

從向量、
到圖、
再到幾何，
數學總是把看似不同的世界
溫柔地連在一起。



◆ 非等角二距離緊框架 · 球面設計 · 強正則圖 ◆

Geometry
today
A richer
tomorrow.

等角直線，最多幾條？

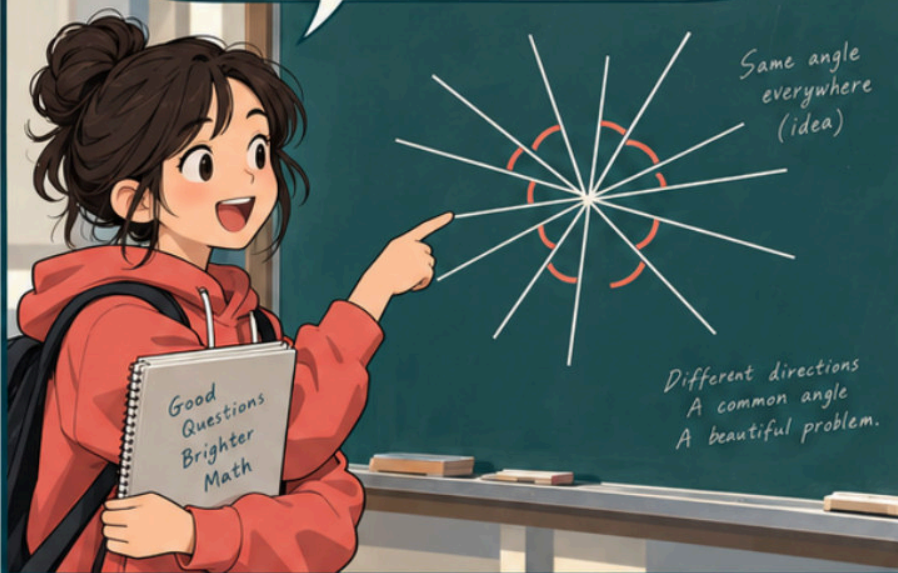
Barg-Yu (2014)

Beautiful
Connections
in Higher Dimensions

Ideas
People
A Brighter Tomorrow.

1

每兩條直線的銳角都相同！



2

線很多時，角度只剩有限種可能。



3

再用三點一致性，收緊上界。



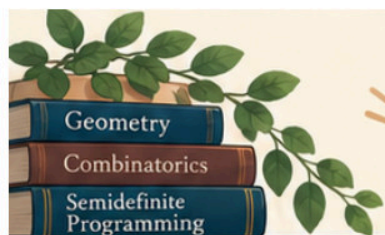
4

24-41 維：最多 276 條！



等角直線 · 半正定規劃 · 已知構造與上界相合

More Math
A Kinder World.



兩種距離，最多幾點？

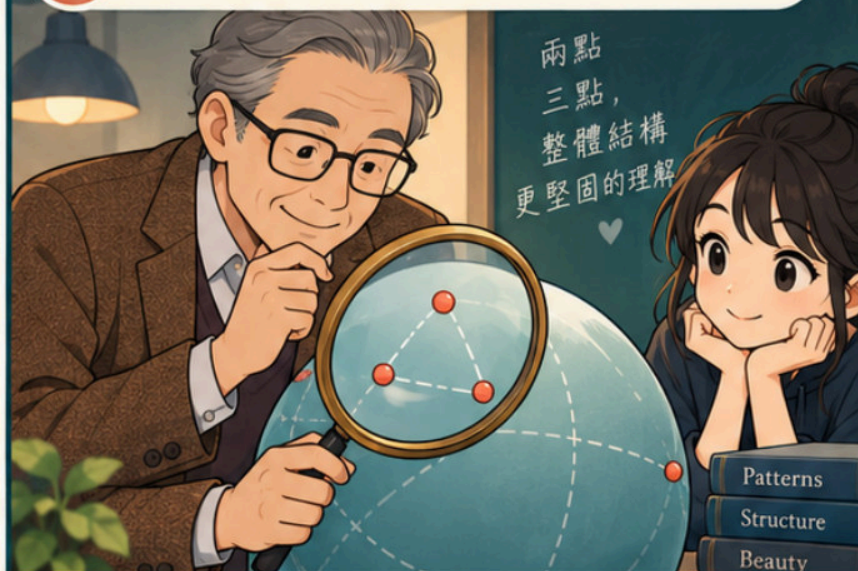
Barg-Yu (2013)

簡單的問題
往往通向
深刻的數學。
——美麗的幾何世界

1 只准兩種距離，能放多少點？



2 不只看兩點，也檢查三點的一致性。



3 網格可能漏掉峰值，用平方和涵蓋整段。



4 23 維的答案：最多 276 點！

