

相干配置的二距離嵌入與Lisoněk唯一性

arXiv:2211.02331v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題與主定理的範圍

在 R^d 中，二距離集合的不同點對只有兩種歐氏距離，一般上界為 $C(d+2,2)$ 。Lisoněk於1997年構造八維45點達界例：9點形成正單形，36點來自Johnson圖 $J(9,2)$ 的球面嵌入，兩組位於不同半徑的同心球面。本文問：具有同樣相干配置型別 $(2,2;3)$ 與指定嵌入結構的例子，在其他維度是否存在？主定理1.3證明只有Lisoněk例子，且完全不預設點數最大。這不是所有八維45點二距離集合的完整分類。

45點可以用座標直接檢查

在 R^9 中令 $X_1 = \{-e_i + (1/3)1_9\}$ ， $X_2 = \{e_i + e_j : i < j\}$ 。兩組座標和皆為2，實際仿射維度為8。 X_1 內平方距離為2； X_2 內為4減去兩倍區塊交集大小；跨組時，點屬於二元區塊得到4，不屬於得到2。因此實際距離只有 $\sqrt{2}$ 與2。共同中心為 $c = (2/9)1_9$ ，兩組半徑平方依序為 $8/9$ 、 $14/9$ ；第二組相對 R^9 原點的範數 $\sqrt{2}$ ，不能誤作相對共同中心的半徑。

相干配置與準對稱設計的橋樑

型別 $(2,2;3)$ 包含點集合 V 與區塊集合 B ：點對分相同、不同兩類；區塊對分相同、交集 α 、交集 β 三類；兩個方向的點—區塊入射關係各分兩類，共九個關係。相干性要求交叉計數只依關係類別而定。這與準對稱 $2-(m,S,\Lambda)$ 設計密切對應： m 個點，每區塊 S 點，每對點在 Λ 個區塊內，區塊交集只有 $\alpha > \beta$ 兩種。區塊圖以交集 α 為鄰接，是強正則圖。

共同嵌入存在，兩距離卻非常特殊

定理1.2利用九維鄰接代數的矩陣單位組成秩 $m-1$ 的正交投影，把點與區塊同時放入 R^{m-1} 。點部分為正單形，區塊部分為縮放的強正則圖球面嵌入，跨組距離由是否入射決定。但一般仍有 $1+2+2$ 種距離型別，未必只有兩個數值。調整區塊球面半徑，使五種型別合併為兩種，才是主定理要分類的特殊情形。

幾何方程如何引出整數變數

把正單形邊長正規化為 $\sqrt{2}$ ，由距離重合消去區塊半徑，得到三個多項式方程 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 。其中 p_1 可整理為 $[x(m+1) - S(S+1)]^2 = 4S^2(S-x)$ ， x, y 依另一平方距離大於或小於2，取 α, β 或交換。令 $z = [x(m+1) - S(S+1)] / (2S)$ ，則 z 為有理數且 $z^2 = S-x$ 為整數，因此 z 本身為整數。進而 $S = x + z^2$ ， $m = (x + z^2 + z)^2 / x$ ，把問題降到主要兩個變數。

相干配置的二距離嵌入與Lisoněk唯一性

arXiv:2211.02331v1 (2022) | 兩頁中文導讀

輔助方程排除無窮多參數

設計參數必須符合整數性，例如每點區塊數 $T=(m-1)\wedge/(S-1)$ 、區塊總數 $n=mT/S$ 。作者把這些參數、圖參數與交叉數組成整數輔助式 g ，並在不同實數區域證明 $0<g<1$ ，從而排除整個區域。第一分支 $y=x-z$ 中，令 $t=z(z+1)/2$ ，幾乎所有 x 偏離 t 的範圍都被排除；邊界 $x=t-1$ 另外用 $0<g<2$ 逼出 $g=1$ ，解得非整數 z 。這比單純有限範圍枚舉更強。

候選族與電腦輔助部分

第二個 y 分支需另選輔助式，限制 g 只取有限整數值，再與 $p_3=0$ 聯立；來源包含電腦輔助實代數排除，本導讀未獨立重跑全部分類。定理4.4最終保留的非退化候選為 $x=z(z+1)/2$ 、 $y=z(z-1)/2$ 、 $S=z(3z+1)/2$ 、 $m=9z(z+1)/2$ ；另外兩類違反區塊大小小於點數等條件。候選整數參數仍不等於真正設計存在，還需最後一層組合限制。

tight 4-design分類完成最後排除

候選族會迫使區塊數 $n=C(m,2)$ 。在 $4\leq S\leq m-4$ 時，準對稱設計因此成為tight 4-design；Enomoto-Ito-Noda的既有分類只留下4-(23,7,1)及補設計。但候選公式的 $m=9z(z+1)/2$ 一定是9的倍數，不可能等於23。邊界 $S=3$ ，以及 $S=m-1, m-2, m-3$ ，對應二次式的判別式均非平方；唯一剩下 $S=2$ 、 $z=1$ ，恢復 $m=9$ 、 $\alpha=1$ 、 $\beta=0$ 與36區塊。

成果的數學意義與驗算層次

這篇工作的特色，是未假設極大點數，卻由距離方程與整數性導出達界區塊數，再接上設計分類。幾何、非交換鄰接代數、丟番圖方程與組合分類在同一證明中合作。本資源另以3倍整數座標精確枚舉45點的990個點對：平方距離18有540對、36有450對，除以9使得原構型平方距離2、4。這驗證構造，並不替代作者對所有參數的唯一性證明。

可延伸方向與來源

後續可問：保留正單形與強正則圖自然嵌入、但移除相干性時，是否有其他例子？型別(3,2;3)或三距離型別(2,2;4)能否使用類似整數輔助式？極值點數能否反過來迫使相干結構？這些是研究方向，不是本文定理。來源：Eiichi Bannai、Etsuko Bannai、Chin-Yen Lee、Ziqing Xiang、Wei-Hsuan Yu，arXiv:2211.02331v1 (2022)；期刊Discrete Mathematics 348(4),114378 (2025)。本文依預印本詳述證明。