

Clifford群特徵標表與量子表示分解

arXiv:2309.14850v2 (2023) | 兩頁中文導讀

研究問題：如何分解龐大的張量表示

Clifford群是量子資訊的重要有限對稱群。本文研究去掉全域相位後的 n 量子位元Clifford群 C_n ，以生成關係及GAP計算 C_1 、 C_2 、 C_3 的完整特徵標表，再分解矩陣共軛表示的高次張量冪。對 $d=2^n$ ，矩陣空間 $M_d = \text{End}(C^d)$ 維度為 4^n ， m 份張量積更達 4^{nm} 維。特徵標方法不直接尋找巨大矩陣的不變子空間，而以每個共軛類的一個數值描述分解重數。

群的定義與生成關係

Pauli算子 I 、 X 、 Y 、 Z 的 n 份張量積，去掉純量相位後構成 P_n 同構 F_2^{2n} ，階為 4^n 。Clifford群由保留Pauli算子共軛結構的西算子構成，亦去掉全域相位。它由局部Hadamard、phase閘與相鄰controlled- Z 閘生成；不能只取局部閘的純張量，否則會漏掉糾纏操作。作者採用由Selinger結果改寫的生成關係，先轉為置換群，再用GAP計算。三量子位元的群階已達92,897,280。

從特徵標表讀出不可約重數

特徵標 $\chi_V(g) = \text{Tr}_V(g)$ 只依共軛類而定。有限群複表示完全可約，其不可約重數為 $a_i = (1/|G|) \sum_j |K_j| \chi_V(g_j) \text{conj}(\chi_i(g_j))$ ，其中 K_j 為共軛類，權重不能省略。本文矩陣表示是 $A \mapsto UAU^\dagger$ ，特徵標等於 $|\text{Tr} U|^2$ ，純量相位因此抵消。張量冪的特徵標只需逐類取 m 次方，再套加權內積。這得到重數與同構型，但不自動給出原空間中各不變子空間的明確基底。

一量子位元例子可完整手算

C_1 同構 S_4 ，有五個共軛類，依 e 、 H 、 P^2 、 HP 、 P 排列，大小為1、6、3、8、6，矩陣特徵標為(4,0,0,1,2)。 M_2 分成恆等矩陣張成的1維部分與無跡矩陣的3維不可約部分。二份張量積的不可約重數依論文順序是(2,1,1,3,0)，配合不可約維度(1,3,2,3,1)，總維度為16。平凡重數另有閉式 $a_m = (4^m + 8 + 6 \cdot 2^m)/24$ ， $m \geq 1$ 。

二與三量子位元的表格成果

C_2 有21個共軛類與21個不可約特徵標， M_4 分成1維與15維； C_3 有67個共軛類與67個不可約特徵標， M_8 分成1維與63維。固定 n 且已知表格後，即使張量次數提高，也只需處理21或67個類值。這不代表原表示空間變小，而是分解問題有較短的資料表示。計算仍受大整數位數與原始表格取得成本影響，不能宣稱任意 n 、任意 m 皆無成本。

獨立核對與unitary design的連結

本導讀從附錄擷取 C_3 完整4489個整數，驗證行、列正交性及不可約維度平方和92,897,280，並重算 M_8 的一至六次張量冪；平凡重數為1、2、6、30、269、4403，皆通過非負整數及總維度 64^m 檢查。前三階符合Haar矩，第四階30不同於24，連結到Clifford為3-design卻非4-design的既有結果。此核對驗證表格內部一致性，並非獨立重做GAP群構造。

一般 $n \geq 3$ 的完美性

C_1 與 C_2 皆有平凡與sign兩個一維角色，但從 $n=3$ 開始只剩平凡角色，因此 C_n 等於導出子群，是完美群。證明可直接使用生成關係：將一維角色限制到各局部 C_1 ，只能是平凡或sign；生成元間的共軛性迫使各位置一致，而涉及三量子位元的關係排除負號選擇。完美並不等於單群，因為 P_n 仍是非平凡正規子群。

正規子群與忠實表示

對 $n \geq 3$ ， P_n 是 C_n 唯一的非平凡真正規子群。關鍵是 C_n/P_n 同構單群 $Sp(2n,2)$ ，以及共軛作用傳遞於非單位Pauli元素。考察候選正規子群與 P_n 的交集及其商像，可能的正規補群會使整群成為直積，進而迫使Pauli共軛作用平凡，造成矛盾。因此任何對 P_n 非平凡的表示皆忠實。矩陣共軛表示對所有 n 皆忠實；一般忠實表示定理保證每個不可約表示終會出現於某個張量冪。

小參數例外與不能延伸的猜想

$n=2$ 時 $Sp(4,2)$ 同構 S_6 ，並非單群； C_2 另有階5760的導出子群，因此一般 $n \geq 3$ 的敘述不能向下照搬。特徵標表在 $n=1、2、3$ 雖全為整數，但 $n=4$ 已有從 $Sp(8,2)$ 拉回的非整數角色值，且反例延續到更大 n 。文章明確修正早期整數值猜想。本導讀也區分平凡重數與commutant維度：後者是全部不可約重數平方和，兩者不能混用。

研究意義與後續方向

本文把量子閘、有限群計算與表示論接成可操作工具，也由殺掉Pauli生成元的關係得到 $Sp(2n,2)$ 的生成表示。後續可比較Clifford子群的高次矩，將特徵標重數轉為明確投影或不變子空間，並探索類似Young圖表的組合表示理論。來源：Chin-Yen Lee、Wei-Hsuan Yu、Yung-Ning Peng、Ching-Jui Lai，On character table of Clifford groups，arXiv:2309.14850v2 (2023)；Journal of Mathematical Physics 66(2) (2025)。