

只有兩種、三種與四種距離的二元碼之最大大小

arXiv:2210.07496v1 (2022) | 兩頁中文導讀

研究問題：限制距離的種類

本文研究二元碼中不同碼字之間只出現少數距離時，最多可以放多少碼字。Hamming距離 d_H 計算不同座標數；s-distance code指所有不同碼字對的距離恰有s種，並不是最小距離等於s，也不要求碼為線性。主要完整結果是對每個 $n \geq 6$ ， $A(H_2^n, 2) = 1 + \text{binom}(n, 2)$ 。下界很直接：取零向量及所有重量2的向量，任兩個不同碼字距離只會是2或4。 $n=6$ 時此構造有16字。困難在於上界必須涵蓋任何可能的兩個距離，而不只構造使用的2與4。

把Hamming問題轉成等角線問題

將二元字 x 映成 $v(x) = ((-1)^{x_1}, \dots, (-1)^{x_n}) / \sqrt{n}$ ，便有 $\langle v(x), v(y) \rangle = 1 - 2d_H(x, y)/n$ 。設距離 $a > b$ 對應內積 $\alpha < \beta$ 。若 $a + b \leq n$ ，可直接套用二距離調和上界得到目標；若 $a + b > n$ ，則 $\alpha + \beta < 0$ 。新增正交單位向量 e ，令 $y_i = tv_i + \sqrt{1-t^2}e$ 、 $t^2 = 2/(2-\alpha-\beta)$ ，新內積變成 $\pm 1/\gamma$ ，其中 $\gamma = (a+b)/(a-b)$ 。因此原碼嵌入 R^{n+1} 的等角線集合，可使用既有等角線上界。

如何處理少數例外

等角線估計一般已給 $|C| \leq \text{binom}(n, 2)$ ，只留下 γ 為奇整數且 $n = \gamma^2 - 2$ 或 $\gamma^2 - 3$ 的例外。令 $\gamma = 2m + 1$ ，再利用距離的整數性、 $a + b > n$ 與 $b \leq n/2$ ，可把例外縮成 $a = (m+1)(2m+1)$ 、 $b = m(2m+1)$ 。若兩內積都負，Rankin界早已足夠。剩下的參數再用球面二距離上界 $(n+2)/((1-(n-1)/(n(1-\alpha)(1-\beta)))$ 處理，分母在所用條件下為正。 $n=6$ 、 $a=6$ 、 $b=3$ 可直接算得 $96/7$ ；其餘例外也低於目標整數門檻，於是上下界吻合。

固定重量：距離等價於交集

Johnson空間 $J^n(n, w)$ 由所有重量 w 的字組成，可視為 n 元素集合的 w 子集，通常假設 $2w \leq n$ 。Johnson距離 $d_J(A, B) = w - |A \cap B| = d_H(A, B)/2$ ；必須注意它只有Hamming距離的一半。標準 s 距離構造固定 $w-s$ 個共同元素，再從其餘 $n-w+s$ 個元素中選 s 個，得到 $\text{binom}(n-w+s, s)$ 個碼字與距離1到 s 。例如 $n=12$ 、 $w=4$ 、 $s=2$ ，固定 $\{1, 2\}$ 並從 $\{3, \dots, 12\}$ 再選兩元素，得到45字。這先給下界，最大性仍須排除所有其他距離組合。

禁止交集與EKR的角色

若禁止兩個 w 子集的交集恰為 l ，對每個固定 l 子集考慮包含它的成員，再刪除該 l 子集，剩餘族必兩兩相交。 $n \geq 2w - l$ 時可用Erdős-Ko-Rado定理，再對所有 l 子集雙重計數，得到 $m(n, w, \text{forbid } l) \leq (w-l)/(n-l) \cdot \text{binom}(n, w)$ 。 $l=0$ 用通常EKR。由此對 $n \geq 2w$ 得到 $A(J^n(n, w), w-1) = \text{binom}(n-1, w-1)$ ，由固定一個共同元素的星形族達成。這是一整族精確答案，也提醒讀者保留 $2w \leq n$ 的基本範圍。

只有兩種、三種與四種距離的二元碼之最大大小

arXiv:2210.07496v1 (2022) | 兩頁中文導讀

Hahn多項式與可手算的對偶證書

在Johnson空間，正規化Hahn多項式滿足 $\psi_k(0)=1$ 。若 f_j 表示距離 d_j 的平均鄰居數，則 $f_j \geq 0$ 、 $|C|=1+\sum f_j$ ，而且 $\sum f_j \psi_k(d_j) \geq -1$ 。選非負權重 y_k ，使每個允許距離都滿足 $\sum y_k \psi_k(d_j) = -1$ ，加總使得 $|C| \leq 1 + \sum y_k$ 。對 $n=12$ 、 $w=4$ 、距離 $\{1,2\}$ ，精確計算得 $\psi_4(1)=-1/8$ 、 $\psi_4(2)=1/28$ 、 $\psi_3(1)=1/16$ 、 $\psi_3(2)=-1/14$ 。取 $y_4=20$ 、 $y_3=24$ ，兩個距離的加權係數都為 -1 ，故上界45，與共同核心構造吻合。

整數條件與精確範圍

Nozaki定理指出 $N=\text{binom}(n,s-1)$ 且 $|C| \geq 2N$ 時， $K_i = \prod_{j \neq i} d_j / (d_j - d_i)$ 為有界整數，因此只需細查少量距離組合；不符合者上界為 $2N-1$ 。結合解析LP證書與小參數計算，兩距離Johnson碼在 $w=4$ 、 $n \geq 9$ ， $w=5$ 、 $n \geq 12$ ， $w=6$ 、 $n \geq 35$ 時分別達 $\text{binom}(n-w+2,2)$ 。 $w=6$ 另外 $15 \leq n \leq 24$ 也由計算涵蓋，不能把25至34的缺口補成已證。三距離時 $w=5$ 、 6 、 7 分別在 $n \geq 12$ 、 16 、 20 達共同核心大小；四距離例如 $w=6$ 、 $n \geq 15$ 也得到精確答案。

小參數計算與三點資訊

解析行列式的符號往往只在充分大 n 成立，有限小 n 需要枚舉距離集合並求LP或Schrijver三點SDP。若 $2N-1$ 仍高於目標，連未滿足整數條件的距離組合也不能略過。本文新增Johnson參數包括三距離 $(n,w)=(12,5)$ ，以及四距離 $(15,6)$ 、 $(16,6)$ 。Hamming三距離則在 $8 \leq n \leq 22$ 、 $24 \leq n \leq 37$ 與 $n=44$ 有 $A=n+\text{binom}(n,3)$ ，新補入34與35。 $n=23$ 的Golay相關2048字構造超過標準1794字，說明三距離情形不能直接推成所有 n 的統一等式。

一般猜想與方法限制

對固定 $w>s$ ，本文討論充分大 n 時 $A(J^n(n,w),s)=\text{binom}(n-w+s,s)$ 的一般猜想，但沒有證明所有 w,s 。選定Hahn證書可給 $c(w,d_1,d_2)n^2$ 階上界；距離 $\{1,2\}$ 得到正確首項 $1/2$ ，但 $w=7$ 、距離 $\{2,4\}$ 只有 $35/64 > 1/2$ ，不足以達到猜想所需的主項。這是方法限制，不是 $35n^2/64$ 構造的存在證明。即使最大大小已確定，也不等於所有最優碼已分類或唯一。原文部分表格與定理範圍、四距離二項式下標有差異，本導讀以定理及數值命題交叉核對。

來源與閱讀方式

來源為Alexander Barg、Alexey Glazyrin、Wei-Jiun Kao、Ching-Yi Lai、Pin-Chieh Tseng、Wei-Hsuan Yu，On the size of maximal binary codes with 2, 3, and 4 distances，arXiv:2210.07496v1 (2022)。本文使用Mathematica、CVX與MOSEK，公開程式位於github.com/PinChiehTseng/s-distance-set。本導讀獨立以有理數重算45字證書，但未重跑全部LP與SDP，也不宣稱表格代表2026最新紀錄。建議先掌握Hamming球面嵌入，再跟算Johnson的45字例子，最後閱讀整數條件與漸近限制。