

等角直線的新上界

arXiv:1311.3219v3 (2014) | 兩頁中文導讀

問題與兩種最大值

在 n 維實空間中，若任意兩條直線的銳角都相同，選取單位代表向量後，其不同內積只能是 $\pm\alpha$ 。固定 α 的最大線數記為 $M_\alpha(n)$ ，允許角度改變則記為 $M(n)$ 。兩者必須區分：某一角度有很強的上界，並不代表其他角度也受同一個數字控制。換向只改變代表向量，不改變原本的直線。

本篇的主要成果

Barg 與 Yu 以半正定規劃證明 $24 \leq n \leq 41$ 時 $M(n)=276$ ，並證明 $M(43)=344$ 。既有的 23 維 276 線構造可嵌入更高維度，另有 43 維 344 線構造；新上界與這些下界相合，因而得到精確最大值。對固定 $\alpha=1/5$ ，原文得到 $23 \leq n \leq 60$ 時 $M_{1/5}(n)=276$ 。這個固定角度結果不等於確定所有相同維度的全局最大值。

經典上界及其限制

Gerzon 界為 $M(n) \leq n(n+1)/2$ ，可由秩一投影 xx^T 在對稱矩陣空間中的線性獨立性理解。固定角度時，Gram 矩陣的跡與秩不等式給相對界 $M_\alpha(n) \leq n(1-\alpha^2)/(1-n\alpha^2)$ ，但必須有 $n\alpha^2 < 1$ 。若分母非正，不能仍把該式當上界。這些基準在不少維度離已知構造很遠，因此需要更細的幾何一致性限制。

整數性使角度變成有限清單

當線數 $N > 2n$ ，Neumann 定理迫使 $1/\alpha$ 為奇整數。再配合二距離集合的整數限制， $N > 2n+1$ 時可寫 $\alpha = 1/(2k-1)$ ，其中 $2 \leq k \leq \lfloor (1+\sqrt{(2n)})/2 \rfloor$ 。於是大配置只須檢查有限個角度，小配置則另外由門檻控制。這與一般二距離問題的連續參數不同，本篇不靠沿角度區間逐段建立 SOS 證書。

三點半正定規劃的內容

兩點 LP 記錄每點平均的 $\pm\alpha$ 鄰居數，利用 Gegenbauer 正核限制這些數量。三點 SDP 再記錄各種內積關係如何共同出現。對稱化後有兩種重複點與四種相異點類型，共六個非負變數；目標是 $1+(x_1+x_2)/3$ 。矩陣值核的正半定性與計數一致性把不可能的局部資料排除，得到通常比兩點 LP 更強的上界。

等角直線的新上界

arXiv:1311.3219v3 (2014) | 兩頁中文導讀

數值表如何閱讀

原文使用 CVX 與截斷參數 $p=5$ 。 $n=40$ 、 41 的全局上界為 276 ； $n=42$ 的 $\alpha=1/7$ 分支給 288 ，因此只得到 $276 \leq M(42) \leq 288$ ； $n=43$ 才再次上下界相合而得到 344 。這份導讀引用原文數值，沒有宣稱重新執行求解器。若要嚴格重現，應保存角度枚舉、模型、對偶可行性、精度與取整所需的裕度。

調和指標設計帶來特殊參數

調和指標 4 設計要求四次球諧函數的總和消失，與要求一至四次全部消失的通常球面 4-design 不同。緊情形與等角直線的連結導出 $\alpha^2=3/(n+4)$ 。若 $\alpha=1/q$ 、 q 為至少 3 的奇數，就有 $n=3q^2-4$ 。在這個參數族，作者建立解析 LP 上界 $M\alpha(n) \leq (n+1)(n+2)/6$ 。

解析 LP 的機制

令 G_k 為正規化 Gegenbauer 多項式。因 $G_k(-\alpha)=(-1)^k G_k(\alpha)$ ，可把兩類平均鄰居數取成相等，使奇次限制自動成立；偶次限制只約束兩者之和。有用的是 $G_k(\alpha)<0$ 的偶數 k ，其界為 $1+1/|G_k(\alpha)|$ 。取所有這些偶次的最小值刻畫固定角度 LP 的最優值，但這個放鬆最優值仍不必等於真實幾何最大值。

LP 可解析，SDP 仍可能強很多

在 $n=71$ 、 $\alpha=1/5$ ，四次核給 $G_4(\alpha)=-1/875$ ，故 LP 界為 876 ；原文 SDP 界則為 416 。另兩例是 $n=143$ 、 $\alpha=1/7$ 的 3480 對 1506 ，以及 $n=239$ 、 $\alpha=1/9$ 的 9640 對 3902 。這些比較固定同一維度與角度，清楚顯示三點一致性比兩點頻率多了實質資訊；所有數字仍是上界，不能自動當作已存在配置。

平台、猜想與研究價值

原文觀察若干固定角度上界的長平台，並據此提出構造猜想。上界的平坦區間不會自動產生下界，也不能把當年的猜想寫成今日已知構造。本篇的價值在於以整數性縮小參數清單，再讓三點 SDP 與解析 LP 互補。來源：A. Barg and W.-H. Yu, New bounds for equiangular lines, arXiv:1311.3219v3 (2014)；Contemporary Mathematics 625 (2014), 111–121。