

球面二距離集合的新上界

arXiv:1204.5268v2 (2013) | 兩頁中文導讀

研究問題與自然構造

在 n 維單位球面上，若不同點之間只出現兩種內積 a 、 b ，等價於只出現兩種距離。最大點數記為 $g(n)$ 。最基本的構造是 n 維正單純形的所有邊中點，再以共同球心正規化，點數為 $n(n+1)/2$ 。兩條邊是否共享頂點決定兩種內積。一般調和上界是 $n(n+3)/2$ ，與自然構造相差 n ，因此找出精確最大值需要更強的方法。

本篇新增成果與歷史範圍

Barg 與 Yu 利用半正定規劃，證明 $n=23$ 及 $40 \leq n \leq 93$ 、 $n \neq 46, 78$ 時， $g(n)=n(n+1)/2$ 。結合前人成果後，7 至 93 維除 22、46、78 外皆有此等式。 $n=22$ 已知 $g(22)=275$ ，大於自然下界 253；46、78 則在本篇仍有差距。對 $n=94$ ，作者得到 $4465 \leq g(94) \leq 4492$ 。這份導讀說明 2013 年論文的結果，不把後續進展倒填進來。

先分幾何情況，再做最佳化

若 $a+b \geq 0$ ，Musin 的既有定理已給 $|X| \leq n(n+1)/2$ 。若兩個內積皆嚴格負，Rankin 界給至多 $n+1$ 點。因此主要計算只需處理 $a \geq 0$ 、 $a+b < 0$ 的部分。對點數至少 $2n+3$ 的二距離集合，Larman–Rogers–Seidel 定理使 $b=(ka-1)/(k-1)$ ，其中 k 是有限範圍內的整數。代入符號條件後， a 落在 $I_k=[0, 1/(2k-1))$ 。兩個連續參數因而縮減成有限個單參數族。

LP 只看兩點，SDP 再看三點

正規化 Gegenbauer 核滿足對所有點對求和非負。用 α_1 、 α_2 表示每點平均的兩類鄰居數，可最大化 $1+\alpha_1+\alpha_2$ ，並施加線性核限制，得到 Delsarte LP 上界。Bachoc–Vallentin 的 SDP 方法則利用固定一點的旋轉對稱性，建立矩陣值核 S_k 。對所有三點求和後矩陣半正定，故可把三點關係的一致性加入限制，比只保留兩點平均更強。

六個變數使問題可以計算

對二距離集合，對稱化三點只有六種類型：兩種重複點類型，以及四種相異三點的內積組合。以 $x_1, \dots, x_6 \geq 0$ 表示正規化計數，且 $x_1=3\alpha_1$ 、 $x_2=3\alpha_2$ ，目標仍為 $1+(x_1+x_2)/3$ 。再加上計數矩陣、各階 S_k 矩陣的正半定性與原有線性限制，就得到有限維 SDP。原文使用截斷階數 $p \leq 5$ ；更高階未觀察到改善，但這不等於證明所有高階限制皆冗餘。

球面二距離集合的新上界

arXiv:1204.5268v2 (2013) | 兩頁中文導讀

網格計算為何尚不足以證明？

固定 n 、 k 後，可沿 l_k 的細網格逐點求解 SDP，觀察最大值可能出現的位置。然而節點之間仍可能藏有峰值，圖形平滑並不能保證整個區間都受控制。原文因此轉向對偶問題：只要找到可行的對偶係數與正半定矩陣，就能用弱對偶給配置大小上界。真正要驗證的是可行性，而不是僅相信求解器回報的最優數字。

平方和把連續區間納入證書

代入 b 的仿射公式後，對偶限制成為 a 的一元多項式非負條件。在子區間 $[a_1, a_2]$ ，令 $a = (a_1 + a_2 x^2)/(1 + x^2)$ 。若 f 的次數至多 m ，則 $F(x) = (1 + x^2)^m f(a)$ 為多項式，且 f 在原區間非負等價於 F 在整條實軸非負。一元實非負多項式可寫成平方和，再以 $F = z^T Q z$ 、 Q 半正定及係數匹配等式表示。這便把無窮多個參數限制重新化為 SDP。

分段與 $n=23$ 的例子

同一組對偶係數若要涵蓋太長區間，可能比逐點最佳值更保守。作者將 l_k 分成小區間，各自求證書，再取所有上界的最大值。例如 $n=23$ 、 $k=3$ ，原文以 20 個子區間報告 276.5 的界。點數必為整數，因此該分支至多 276；合併所有其他分支並使用 276 點構造，得到 $g(23)=276$ 。這是引用原文結果，並非宣稱本次重新執行求解器或產生新的嚴格證書。

數值表必須搭配分支解讀

原表 $n=40$ 的 SDP 欄為 315，卻有 820 點的自然構造，兩者並不矛盾：315 是需要計算的負內積和分支之上界，整個問題要與非負和分支的 820 取最大值。因此全局精確值是 820。 $n=94$ 的 4492 則已超過自然下界 4465，留下 27 點差距。把表中的 SDP 欄直接當作無條件的 $g(n)$ 上界，是閱讀本篇最容易犯的錯誤。

研究價值與來源

本篇把幾何構造、距離比的整數條件、三點 SDP 與區間 SOS 結合，示範如何讓有限計算涵蓋連續的配置參數。若重現計算，應保存區間分割、對偶與 Gram 矩陣、係數殘差及正半定餘量，特別留意取整所需的安全裕度。
來源：A. Barg and W.-H. Yu, New bounds for spherical two-distance sets, arXiv:1204.5268v2 (2013)；
期刊版 Experimental Mathematics 22(2) (2013), 187–194。