

少角度對蹠球面設計的上界

arXiv:2007.13999v3 (2020) | 兩頁中文導讀

問題與精確強度

對蹠集合 $X \subset S^{d-1}$ 滿足 $X = -X$ ，角度集合 $A(X)$ 是不同點的內積，角度數為 s 。強度 t 表示 X 是球面 t -design，但不是 $(t+1)$ -design。對蹠性自動消去所有奇次調和矩，因此精確強度是奇數。本文問：同時具有少量內積值與指定平均性時， X 最多能有幾個點？精確強度是不可省略的假設；最高強度的緊設計常是較強上界的例外。

一般偶數角度上界

經典 Delsarte–Goethals–Seidel 界為 $|X| \leq 2 \operatorname{binom}(d+s-2, s-1)$ ，等號對應 tight spherical $(2s-1)$ -design。作者在 $d \geq 2$ 、 $t \geq 3$ ，且 s 為偶數並滿足 $(t+5)/2 \leq s \leq t+1$ 時，將它改為 $|X| \leq 2 \operatorname{binom}(d+s-2, s-1) - 2h_{t-s+2}$ ，其中 h_k 是 k 次齊次調和空間維數。 $h_0=1$ 、 $h_1=d$ ， $k \geq 2$ 時 $h_k = \operatorname{binom}(d+k-1, k) - \operatorname{binom}(d+k-3, k-2)$ 。例如 $d=3$ 、 $s=4$ 、 $t=3$ 的形式上界由 40 降為 34，並不表示 34 點一定存在。

取一半並建立調和矩陣

從每對相反向量選一點，得到大小 $N=|X|/2$ 的 X 。這一半保留偶次調和條件，但未必零重心。令 H_k 為調和基底在 X 上的求值矩陣， $D_k = H_k H_k^T$ ， $V_k = \operatorname{range}(D_k)$ ，則 $\dim V_k \leq h_k$ 。同奇偶且 $k+l \leq t$ 時，設計條件給 $H_k^T H_l = N \delta_{kl}$ ，故 $D_k D_l = N \delta_{kl} D_k$ 。這些像空間的相依性控制了點數。

扣除一個冗餘的調和空間

偶數 s 時角度為 -1 、 0 、 $\pm \alpha_i$ 。共同奇多項式 $F(z) = z \prod (z^2 - \alpha_i^2) / (1 - \alpha_i^2)$ 在半集合的非對角內積都消失，且 $F(1)=1$ ，因此其 Gegenbauer 展開給 $l = \sum_k \text{奇數 } f_k D_k$ 。精確強度使 $l = t - s + 2$ 的係數 f_l 不等於 $1/N$ ；配合矩陣正交性，可推出 V_l 包含於 V_{s-1} 。秩總和於是能省去 h_l ，再乘二便得主定理。此方法不要求任意半集合都出現全部正負角度。

三角度分支與 ETF

三角度對蹠設計對應 real equiangular tight frame (ETF) 的對蹠補全。若 Φ 有 $n > d$ 個單位向量，Welch 界為 $\operatorname{coherence}^2 \geq (n-d)/(d(n-1))$ ，取等號就是 ETF。一般上界定理的參數區間不涵蓋 $s=3$ 、 $t=3$ ，所以作者改用角度倒數的奇整數限制。向量數 n 與對蹠點數 $|X|=2n$ 必須區分；最大 Gerzon ETF 的補全具有強度五，不屬強度恰三的分枝。

少角度對蹠球面設計的上界

arXiv:2007.13999v3 (2020) | 兩頁中文導讀

ETF 的兩端空隙

對 $d \geq 5$ 、 $n > d+1$ 的 ETF，若 n 不是 $d+1/2+\sqrt{(2d+1)/4}$ 或 $d(d+1)/2$ ，則 $d+1/2+\sqrt{(3d+1)/4} \leq n \leq d(d+2)/3$ 。證明在 $n > 2d$ 時令 q 為共同角度倒數， $c=q^2-d$ 為正整數，滿足 $c(n-d)=d(d-1)$ 。 $c=1$ 違反 Gerzon， $c=2$ 給最大端點， $c \geq 3$ 給新上界。再對維數 $n-d$ 的 Naimark 補框架使用同樣論證，取得下界。 $n=2d$ 單獨處理且已在區間內。

ETF 例子與 Krein 條件

$(d,n)=(6,16)$ 、 $(22,176)$ 達到 $n=d(d+2)/3$ ，補全分別有 32、352 點。強度恰三的對蹠三角度集合因此有 $|X| \leq 2d(d+2)/3$ 。另一個結果是：ETF 所對應特殊強正則圖族的兩條 Krein 不等式，恰等價於 Gerzon 的上下界。這不表示所有圖可行性條件都多餘，角度整數性、參數整數性與實際存在性仍有額外限制。

四角度五設計與 Levenstein 界

當 $n > d(d+1)/2$ ，Levenstein coherence 下界平方為 $(3n-d(d+2))/((d+2)(n-d))$ 。等號排列的內積是 0、 $\pm p$ ，補成對蹠集合後為四角度五設計。整數矩陣 $Z=(G-I)/p$ 的兩特徵值 $-1/p$ 與 $(n-d)/(dp)$ 重數不相等；代數共軛論證迫使它們為整數。非正交圖又給出維數 $m=n-d(d+1)/2$ 的兩距離嵌入，排除 $n=d(d+2)/2$ 的重複向量例外後，得到 $n \geq d(d+3)/2$ 。

整數參數與更小的上界

令 $q=1/p$ 、 $a=3q^2-d-2$ ，則 $n=d(d+2)(d-1+a)/(3a)$ 。除特殊例外外， a 為 2 到 $2(d-1)(d+2)/(d+5)$ 之間的整數， n 也須整數。 $a=2$ 對應緊七設計端點；精確強度五排除此端點，剩餘 $a \geq 3$ ，得到 $|X| \leq 2d(d+2)^2/9$ ，比經典 $d(d+1)(d+2)/3$ 更小。例子 $(d,n)=(7,63)$ 、 $(22,1408)$ 達線數上界，來自高一維緊七設計的赤道截面；原文未證明所有等號例都如此產生。

閱讀重點與來源

本文三種上界有不同假設：一般偶數角度用調和像空間；ETF 與 Levenstein 等號排列則用譜與整數性。它們提供必要條件，沒有為每組留下的候選參數建構點集。來源：Zhiqiang Xu、Zili Xu、Wei-Hsuan Yu，Bounds on antipodal spherical designs with few angles，The Electronic Journal of Combinatorics 28(3) (2021)，P3.39，DOI:10.37236/9891。本導讀依 arXiv:2007.13999v3 (2020年7月30日) 全文，未將來源中的猜想或問題宣告為現今已解定理。