

少距離集合與等角直線的上界

Glazyrin–Yu | 兩頁中文導讀 | 問題與成果

研究問題：距離很少，點數能有多大？

在單位球面上，兩點距離的平方是 2 減去兩倍內積，因此「只有 s 種距離」等價於「不同點間只有 s 種內積」。這種少距離集合把連續幾何和有限組合結構連接起來。等角直線是其中的重要特例：每條直線選一個單位向量後，不同向量內積的絕對值皆為固定常數 α ；改變向量的正負號不改變直線本身。

自然構造與經典上界

記 $g(n)$ 為 n 維空間內球面二距離集合的最大點數， $M(n)$ 為等角直線的最大條數。正單純形有 $n+1$ 個頂點；將所有邊中點正規化，可得到 $n(n+1)/2$ 個點。兩條邊是否共用頂點恰好形成兩種關係。另一方面，Gerzon 的經典界給出 $M(n) \leq n(n+1)/2$ 。困難在於：一般二距離集合不是等角集合，而固定角度的資訊也未充分進入這個維度計數界。

主要成果與不能省略的條件

本篇證明：對 $n \geq 7$ ， $g(n) = n(n+1)/2$ ，可能例外僅出現在部分 $n = (2k+1)^2 - 3$ 。這不代表所有例外維度均已解決。固定共同內積絕對值 $1/a$ 時，作者給出 $M_{1/a}(n) \leq n(2a^2/3 + 4/7) + 2$ ，適用所有 $a \geq 3$ 及正整數 n 。它的特色是參數範圍普遍有效；不是宣稱每一組參數都取得當前最佳界。

從固定角度走向全角度

對 $n \geq 359$ ，取唯一正奇數 a ，使 $a^2 - 2 \leq n \leq (a+2)^2 - 3$ ，則 $M(n) \leq (a^2 - 2)(a^2 - 1)/2$ 。此界在一段維度上保持常數；除了左端 $n = a^2 - 2$ 外，嚴格改善 Gerzon 界。例如 $359 \leq n \leq 438$ 時得到 $M(n) \leq 64620$ 。這只是上界，不能據此推論有如此多條直線的構造。

第一層方法：PSD 核提供可用的不等式

正規化 Gegenbauer 多項式 G_k 滿足 $G_k(1) = 1$ ，其內積核矩陣 $[G_k(\langle x_i, x_j \rangle)]$ 為半正定 (PSD)。例如 $G_2(t) = (nt^2 - 1)/(n - 1)$ 。把矩陣所有元素相加必須非負，立即得到經典相對界 $Ma(n) \leq n(1 - \alpha^2)/(1 - n\alpha^2)$ ，但必須假設 $n\alpha^2 < 1$ 。這個簡單例子展示「幾何限制變成矩陣正性」的基本思路。

少距離集合與等角直線的上界

Glazyrin-Yu | 兩頁中文導讀 | 證明與結構

核心創新：讓大重數特徵值耗用跡

對每一種距離建立鄰接矩陣 A_i ，以 $s-1$ 次插值多項式證明 $A_i - kI$ 的秩至多為 K ； K 是相關低次函數空間的維度。因此每個 A_i 都有至少 $N-K$ 重的指定特徵值。把這些空間與全 1 向量的正交補相交，可找到至少 $N-1-K(s-1)$ 維的共同子空間。這不需要預先假設所有距離矩陣可交換。

低秩、重數與半正定性如何接合

取球面函數的非負線性組合 P ，形成逐項作用在內積上的核矩陣 H 。它在上述共同子空間有相同特徵值 λ ，而所有特徵值非負，因此「已知重數乘以 λ 」不能超過 $\text{tr}(H) = NP(1)$ 。這就是定理 9 的主不等式。在球面二距離情形，取 $P = G_2$ 和 $K = n+1$ ，可將它整理成含兩個內積參數的顯式上界。這裡的逐項核不是一般的矩陣多項式。

幾何技巧：先改造集合，再套上界

直接把 $\alpha = 1/a$ 、 $\beta = -1/a$ 代入新界並不理想。作者先固定一個基點，換號使其餘向量與它的內積皆為 $1/a$ ，再正交投影、正規化，得到 $n-1$ 維二距離集合，其內積為 $1/(a+1)$ 、 $-1/(a-1)$ 。第一次估計得到小於 na^2 的界；再選基點、分成兩組並各自投影，將主要係數改善為 $2/3$ 。 $a=5$ 、 $n=137$ 時，保留兩分支的精細公式可得到 2224 的上界，優於通用簡式取整後的 2363。

等號不是只有數字：它迫使維度剛性

若 $a \geq 3$ 為奇數、 $n \leq 3a^2 - 16$ ，且等角集合達到 $(a^2-2)(a^2-1)/2$ 個點，則它實際張成 a^2-2 維。證明追蹤 PSD 不等式的取等條件，再用換基點對應的圖換號，逼出正則性及固定共同鄰居數，也就是強正則圖。圖的譜決定衍生集合 Gram 矩陣的秩為 a^2-3 ；加回基點方向，便得到原集合的維度。這不是所有參數下構形唯一性的宣稱。

閱讀重點與來源

這篇文章的價值是把插值造成的低秩、特徵值的大重數、PSD 的跡估計，以及衍生集合的降維技巧結合。原文仍留下例外維度及極大二距離集合分類的問題。本文依作者預印本 arXiv:1611.09479v1 (2016) 撰寫，定理編號與條件亦依該版；不作 2026 年最新研究現況的宣稱。期刊書目：A. Glazyrin and W.-H. Yu, Upper bounds for s -distance sets and equiangular lines, *Advances in Mathematics* 330 (2018), 810–833。